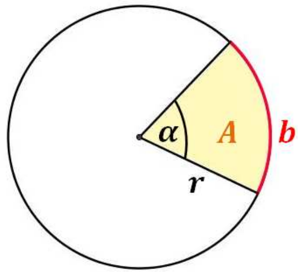
M 10.1

Kreissektoren und Bogenmaß

In einem Kreis mit Radius r gilt für einen **Kreissektor** mit Mittelpunktswinkel α:



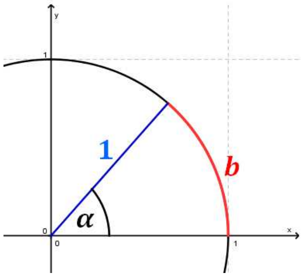
Länge des Kreisbogens

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2r\pi$$

Fläche des Kreissektors

$$A = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$

Das **Bogenmaß** b eines Winkels α ist die Länge des zugehörigen Kreisbogens im Einheitskreis ($r = 1$):



Umrechnungsformeln:

$$b = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi \qquad \alpha = \frac{b}{2\pi} \cdot 360°$$

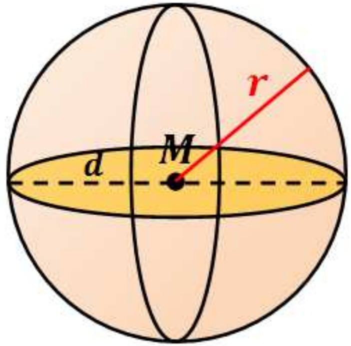
Besondere Werte:

Gradmaß α	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
Bogenmaß b	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

M 10.2

Kugel

Ist r der Radius einer Kugel, so gilt:

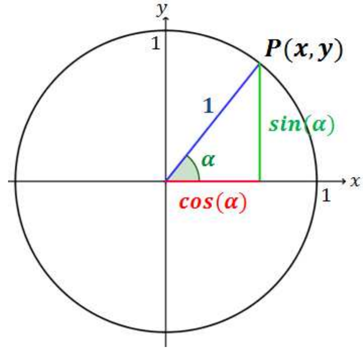


- Volumen: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$
- Oberfläche: $O = 4\pi r^2$

$$r = 6cm$$
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot (6cm)^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 216cm^3 \approx 905cm^3$$
$$O = 4\pi \cdot (6cm)^2 = 4\pi \cdot 36cm^2 \approx 452cm^2$$

M 10.3

Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

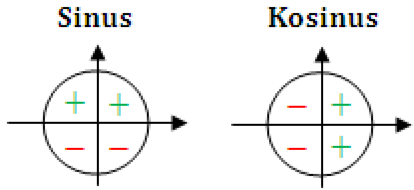


Für beliebige Winkel $0 < \alpha < 360°$ gibt

- der Sinus die y-Koordinate: $y = \sin(\alpha)$
- der Kosinus die x-Koordinate: $x = \cos(\alpha)$

eines Punktes P an, der unter α auf dem Einheitskreis liegt.

Die Sinuswerte (bzw. Kosinuswerte) haben für den spitzen Winkel α sowie für die Winkel $180° - \alpha, 180° + \alpha$ und $360° - \alpha$ denselben Betrag. Die Vorzeichen liefern die Quadranten:



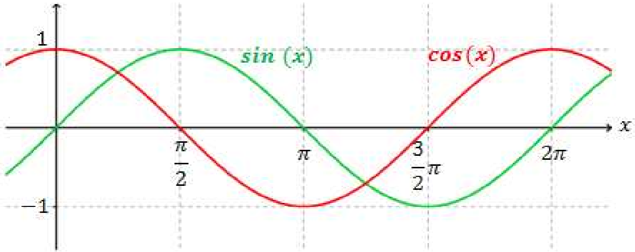
Alle anderen Winkel lassen sich durch Addition und Subtraktion von Vielfachen von $360°$ auf einen Winkel zwischen $0°$ und $360°$ zurückführen.

$762° = 2 \cdot 360° + 42°$ → $762° \mathrel{\widehat{=}} 42°$ am Einheitskreis

$1596° = 4 \cdot 360° + 156°$ → $1596° \mathrel{\widehat{=}} 156°$ am Einheitskreis

M 10.4

Sinus- & Kosinusfunktion



α im Gradmaß	x im Bogenmaß	$sin(x)$	$cos(x)$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0
$180°$	π	0	-1

Eigenschaften:

Sinusfunktion $sin(x)$

periodisch mit der Periode 2π

$sin\,(x) = sin(x + k \cdot 2\pi)\,, k \in \mathbb{Z}$

Kosinusfunktion $cos(x)$

periodisch mit der Periode 2π

$cos\,(x) = cos\,(x + k \cdot 2\pi), k \in \mathbb{Z}$

Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$

Wertemenge $\mathrm{W} = [-1; 1]$

punktsymmetrisch zum Ursprung

$sin(-x) = -sin\,(x)$

achsensymmetrisch zur y-Achse

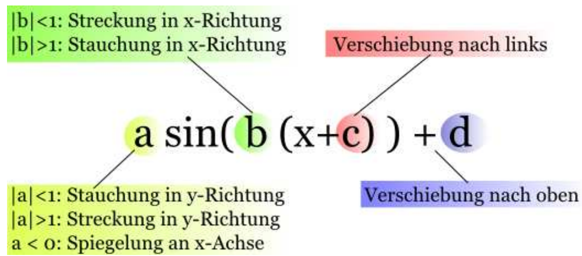
$cos(-x) = cos\,(x)$

M 10.5

Die allgemeine Sinusfunktion

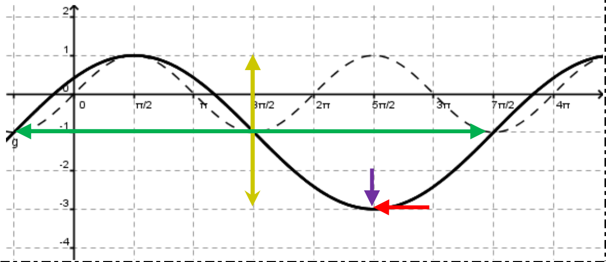
Durch die allgemeine Sinusfunktion $f(x) = a \cdot \sin\big(b(x + c)\big) + d$ lassen sich beliebige sinusförmige Graphen beschreiben:

- a: Stauchung/Streckung in y-Richtung (Amplitude)
- b: Stauchung/Streckung in x-Richtung.
- c: Verschiebung in x-Richtung
- d: Verschiebung in y-Richtung



$$g(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) - 1$$

- $a = 2$: Doppelter Ausschlag nach oben (2)
- $b = \frac{1}{2}$: Doppelte Periode (4π)
- $c = \frac{\pi}{2}$: Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links
- $d = -1$: Verschiebung um 1 nach unten

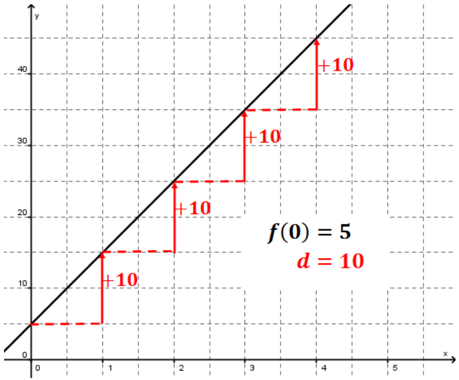


M 10.6

Lineares und exponentielles Wachstum

Lineares Wachstum

Konstanter Zuwachs pro Zeiteinheit

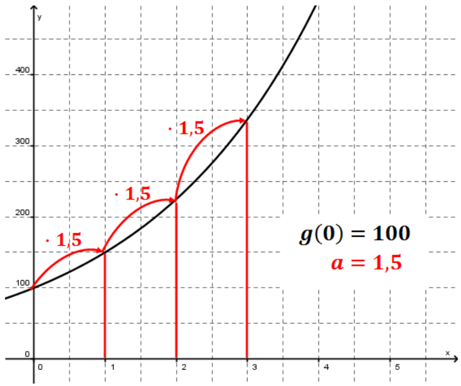


Nimmt die Größe x um 1 zu, so wächst die Größe y stets um einen festen Summanden d.

$$y = b + x \cdot d$$

Exponentielles Wachstum

Konstanter Wachstumsfaktor in gleichen (Zeit-) Schritten



Nimmt die Größe x um 1 zu, so wächst die Größe y stets um einen festen Faktor a.

$$y = b \cdot a^x$$

M 10.7

Exponentialfunktion

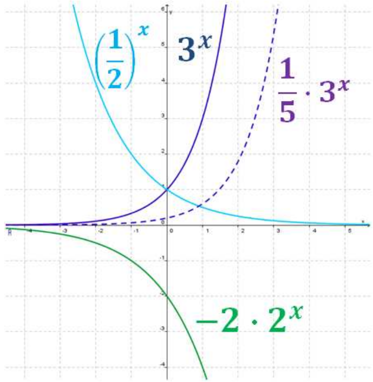
Funktionen der Form $f(x) = b \cdot a^x$ ($D_f = \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) heißen Exponentialfunktionen. Die Konstante a gibt den **Wachstumsfaktor** an. Die Konstante b gibt den **Anfangswert** der Funktion für $x = 0$ an, also ist $f(0) = b$.

Für $a > 1$ steigt der Graph
→ **Wachstum**

Für $a < 1$ fällt der Graph
→ **negatives Wachstum**

Der Graph verläuft durch den Punkt $(0; b)$.

Die x-Achse ist Asymptote.



Ist $b \neq 1$, so wird der Graph in y-Richtung mit dem Faktor b gestreckt ($|b| > 1$) bzw. gestaucht ($|b| < 1$).

Ist $b < 0$, so wird der gestreckte/gestauchte Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Spiegelt man den Graphen von $f(x) = ba^x$ an der y-Achse,
so erhält man den Graphen von $g(x) = b \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^x$ und umgekehrt.

M 10.8

Logarithmus

Die eindeutige Lösung der (Exponential-)Gleichung $a^x = b$ (für $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$) bezeichnet man als Logarithmus von b zur Basis a und schreibt $x = \log_a b$:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad \log_a b = x \qquad\qquad \log_a 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^0 = 1$$

$$2^9 = 512 \quad \Leftrightarrow \quad \log_2 512 = 9 \qquad\qquad \log_b(b^x) = x \quad \Leftrightarrow \quad b^x = b^x$$

„Logarithmus“ ist ein Name für „Exponent zu einer bestimmten Basis“

$$3^x = 81 \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_3 81 = 4$$

Rechenregeln:

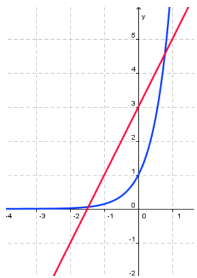
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$ (Produktregel)
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$ (Quotientenregel)
- $\log_a(b^c) = c \cdot \log_a b$ (Potenzregel)
- $\log_a b = \frac{\log_u b}{\log_u a}$ (Wechsel der Basis)

M 10.9

Exponentialgleichungen

Bei einer Exponentialgleichung tritt die Unbekannte im Exponenten auf.

Es gibt verschiedene Arten von Exponentialgleichungen, für die es unterschiedliche Lösungsstrategien gibt:

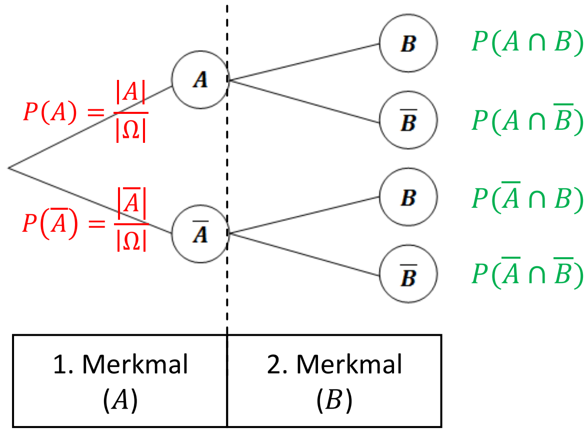
Logarithmieren	***Substitution***	***Grafisch***
Exponentialgleichungen, die in die Form $a^x = b$ gebracht werden können, löst man durch Logarithmieren: $\mathbf{2,5 \cdot 3^x = 5 \cdot 2^x \ /: 2,5}$ $\mathbf{3^x = 2 \cdot 2^x \ /: 2^x}$ $\mathbf{1,5^x = 2 \ / \log_{1,5}}$ $\mathbf{x = \log_{1,5} 2}$ $\mathbf{x \approx 1,71}$	$\mathbf{5^{2x} - 2 \cdot 5^x - 8 = 0}$ Substitution: $u = 5^x$ $(u^2 = 5^{2x})$ ➔ $\mathbf{u^2 - 2u - 8 = 0}$ Lösung der quadratischen Gleichung und Resubstitution liefert das Ergebnis: $\mathbf{x \approx 0,86}$	Exponentialgleichungen in denen die Unbekannte im Exponenten **und** in der Basis auftreten sind rechnerisch unlösbar. Eine näherungsweise Lösung bietet das Zeichnen in einem Koordinatensystem:  $\mathbf{3^x = 2x + 3}$

M 10.10

Vierfeldertafel

Statistische Angaben über zwei Merkmale mit jeweils zwei Merkmalsausprägungen stellt man üblicherweise in einer sog. Vierfeldertafel dar. Diese kann Anzahlen oder auch Wahrscheinlichkeiten enthalten. Die Wahrscheinlichkeiten findet man auch im zugehörigen Baumdiagramm.

	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{\overline{A}}$	
$\boldsymbol{B}$	$\lvert A \cap B \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap B \rvert$	$\lvert B \rvert$
$\boldsymbol{\overline{B}}$	$\lvert A \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{A} \cap \overline{B} \rvert$	$\lvert \overline{B} \rvert$
	$\lvert A \rvert$	$\lvert \overline{A} \rvert$	$\lvert \Omega \rvert$

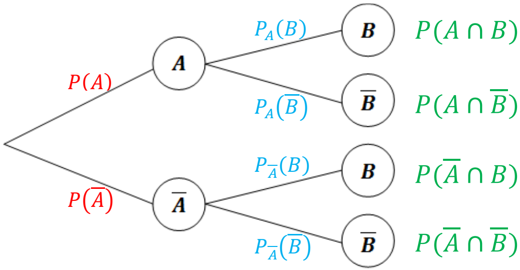


M 10.11

Bedingte Wahrscheinlichkeit

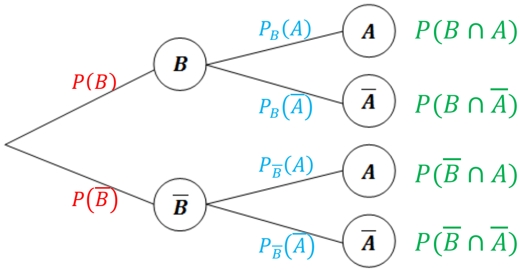
$P_A(B)$ ist die Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung, dass A eingetreten ist. Die möglichen Ergebnisse sind nur noch die Ergebnisse von A. Die günstigen Ergebnisse sind die Ergebnisse von A, bei denen zusätzlich B eintritt.

1. Baumdiagramm



1. Merkmal (A)	2. Merkmal (B)

2. Baumdiagramm



1. Merkmal (B)	2. Merkmal (A)

Berechnung: $$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

M 10.12

Ganzrationale Funktionen

Potenzfunktionen Koeffizienten

Grad

$$\underbrace{f(x) = \underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}_{\text{Polynom}}}_{\text{ganzrationale Funktion}}$$

Das Verhalten einer ganzrationalen Funktion im Unendlichen:

$$g(x) = -4x^5 + x^2 - 3$$

entscheidend für große $|x|$-Werte

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="2">höchster vorkommende Exponent (hier 5)</td></tr>
<tr><td>gerade</td><td>ungerade</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Leitkoeffizient a_n (hier -4)</td><td>$a_n > 0$</td><td>„von links oben nach rechts oben“</td><td>„von links unten nach rechts oben“</td></tr>
<tr><td>$a_n < 0$</td><td>„von links unten nach rechts unten“</td><td>„von links oben nach rechts unten“</td></tr>
</table>

M 10.13

Nullstellen einer ganzrationalen Funktion

Eine ganzrationale Funktion n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen.

Bestimmung der Nullstellen der Funktion $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Errate Nullstelle durch systematisches Probieren (NST Teiler von a_0)

$$x_0 = 1$$

Schreibe Funktion als Produkt mit Restpolynom $r_1(x)$

$$f(x) = (x-1) \cdot r_1(x)$$

Polynomdivision

$$(x^3 - 3x + 2) : (x-1) = x^2 + x - 2$$

Restliche Nullstellen durch Mitternachtsformel (bzw. Vieta) bestimmen

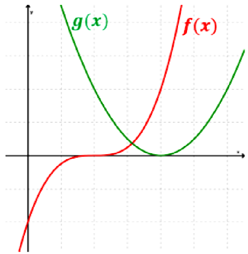
$$x_1 = 1 \quad x_2 = -2$$

falls Grad des Restpolynoms > 2

→ ***Faktorisierte Form:*** $f(x) = (x-1)^2(x+2)$ (doppelte Nullstelle bei $x = 1$)

Tritt in der vollständig faktorisierten Form eine Nullstelle x_k

- **ungeradzahlig** oft auf, wechselt $f(x)$ bei x_k das Vorzeichen,
- **geradzahlig** oft auf, wechselt $g(x)$ bei x_k das Vorzeichen nicht.



M 10.14

Polynomdivision

$$(x^4 - 4x^3 - 22x^2 + 4x + 21) : (x - 1) = \mathbf{x^3 - 3x^2 - 25x - 21}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{-(x^4 - x^3)} \\
\quad -3x^3 - 22x^2 \\
\quad \underline{-(-3x^3 + 3x^2)} \\
\qquad -25x^2 + 4x \\
\qquad \underline{-(-25x^2 + 25x)} \\
\qquad\quad -21x + 21 \\
\qquad\quad \underline{-(-21x + 21)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

M 10.15

Verschieben, Strecken und Spiegeln von Funktionsgraphen

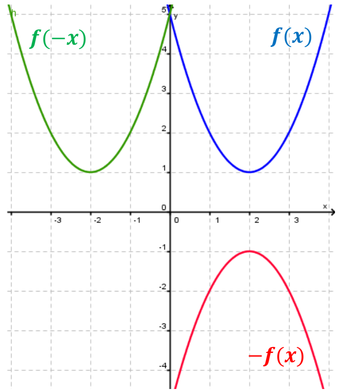
❖ Verschiebung von Funktionsgraphen

- a: Stauchung/Streckung in y-Richtung
- b: Stauchung/Streckung in x-Richtung.

$$g(x) = \mathbf{a} \cdot f(\mathbf{b}(x - \mathbf{c})) + \mathbf{d}$$

❖ Strecken (Stauchen) von Funktionsgraphen

- c: Verschiebung in x-Richtung
- d: Verschiebung in y-Richtung



❖ Spiegelung an der x-Achse

$-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ist der an der x-Achse gespiegelte Graph von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

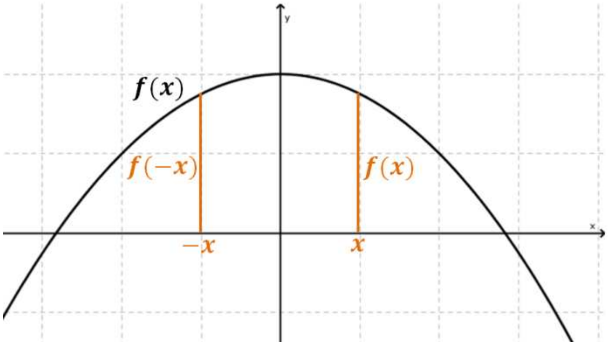
❖ Spiegelung an der y-Achse

$\boldsymbol{f}(-\boldsymbol{x})$ ist der an der y-Achse gespiegelte Graph von $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

M 10.16

Symmetrie von Funktionsgraphen

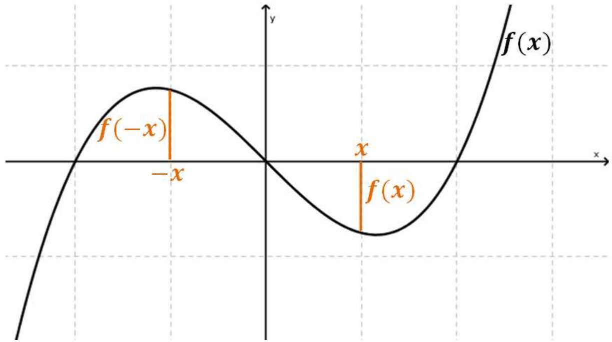
Achsensymmetrie zur y-Achse



Gleich weit vom Nullpunkt entferte x-Werte besitzen stets denselben Funktionswert.

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie zum Ursprung



Gleich weit vom Nullpunkt entfernte x-Werte besitzen stets den betragmäßig gleichen Funktionswert mit unterschiedlichem Vorzeichen.

$$f(-x) = -f(x)$$

M 10.17

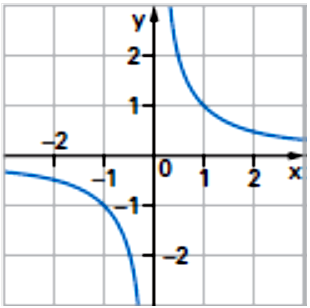
Verhalten im Unendlichen

Konvergenz

Kommen die Funktionswerte $f(x)$ einer Funktion f für beliebig groß werdende x-Werte einer Zahl $a \in \mathbb{R}$ beliebig nahe, so nennt man a den **Grenzwert** der Funktion f für x gegen unendlich ($x \to \pm\infty$).

Die Gerade mit der Gleichung $y = a$ ist dann waagrechte Asymptote von G_f.

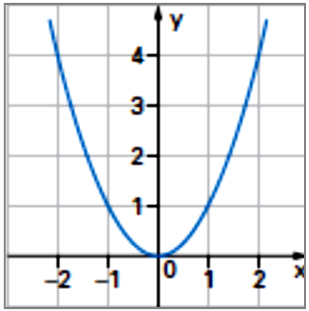
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = a$$



Divergenz

Wachsen die Funktionswerte $f(x)$ für $x \to +\infty$ bzw. $x \to -\infty$ unbegrenzt nach ∞ oder sinken sie unbegrenzt nach $-\infty$, so divergiert die Funktion, d.h. sie besitzt keinen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



M 10.18

Strategien zum Untersuchen des Verhaltens im Unendlichen

❖ Ganzrationale Funktionen

vgl. 10.12

$$g(x) = -4x^5 + x^2 - 3$$

entscheidend für große $|x|$-Werte

$$lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$$

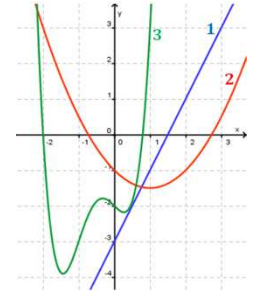
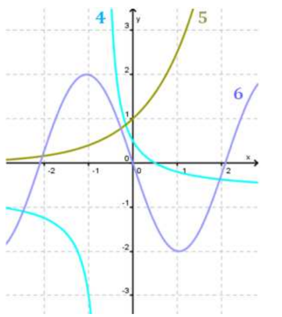
❖ Gebrochen rationale Funktionen

jedes Glied des Zählers und Nenners durch die höchste Nennerpotenz dividieren:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x+1}{3+2\underbrace{x^2}_{\text{größte Nennerpotenz}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{3}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\overbrace{\frac{2}{x}}^{\text{geht gegen 0}}+\overbrace{\frac{1}{x^2}}^{\text{geht gegen 0}}}{\underbrace{\frac{3}{x^2}}_{\text{geht gegen 0}}+2} = \frac{3}{2}$$

M 10.19

Grundfunktionen

	Name	Term	Beispiel	Graph
1	Lineare Funktionen	$f(x) = mx + t$	$\boldsymbol{f(x) = 2x - 3}$	
2	Quadratische Funktionen	$f(x) = ax^2 + bx + c$	$\boldsymbol{f(x) = 0,5x^2 - x - 1}$	
3	Ganzrationale Funktionen	$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$	$\boldsymbol{f(x) = 2x^4 + 4x^3 - x - 2}$	
4	Gebrochen rationale Funktionen	$f(x) = \frac{p_1(x)}{p_2(x)}$	$\boldsymbol{f(x) = \frac{2x - 1}{-3x - 2}}$	
5	Exponential-funktionen	$f(x) = a^x$	$\boldsymbol{f(x) = 2,5^x}$	
6	Winkel-funktionen	$f(x) = \mathrm{a} \cdot \sin(\mathrm{b}(\mathrm{x} + \mathrm{c})) + \mathrm{d}$	$\boldsymbol{f(x) = 4\sin(1,5x - \pi)}$	