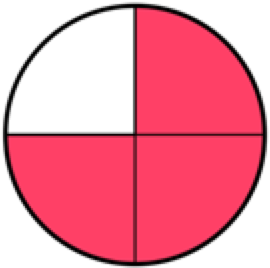
M 6.1

Brüche

Brüche beschreiben Bruchteile.

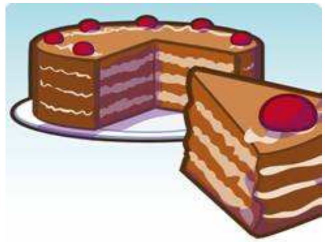


$$\frac{3}{4}$$

Der **Zähler** gibt an, dass man 3 von diesen Teilen nimmt.

Bruchstrich

Der **Nenner** gibt an, dass das Ganze in 4 Teile zerlegt wird.



$$\frac{3}{4}\ von\ 100kg = \left(\frac{1}{4}\ von\ 100kg\right)\cdot 3 = (100kg : 4)\cdot 3 = 25kg \cdot 3 = 75kg$$

Die Schokoladentafel hat 14 Stückchen, d.h. ein Stückchen entspricht dem Anteil

$$\frac{1}{14}$$

M 6.2

Prozentschreibweise

Anteile werden häufig in **Prozent** angegeben. „Prozent“ heißt „Hundertstel“.

$$\frac{3}{100} = 3\%$$

Häufig vorkommende Prozentsätze

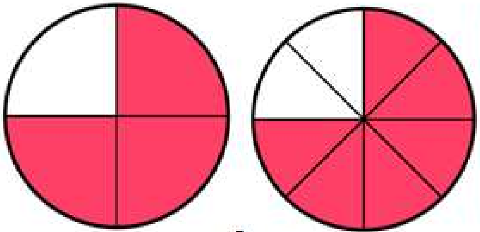
	$1 = 100\%$			
Nenner 2	$\frac{1}{2} = 50\%$			
Nenner 4	$\frac{1}{4} = 25\%$		$\frac{3}{4} = 75\%$	
Nenner 5	$\frac{1}{5} = 20\%$	$\frac{2}{5} = 40\%$	$\frac{3}{5} = 60\%$	$\frac{4}{5} = 80\%$
Nenner 10	$\frac{1}{10} = 10\%$	$\frac{3}{10} = 30\%$	$\frac{7}{10} = 70\%$	$\frac{9}{10} = 90\%$

M 6.3

Erweitern und Kürzen

Kürzen

Zähler und Nenner werden durch dieselbe Zahl dividiert.



Erweitern

Zähler und Nenner werden mit derselben Zahl multipliziert.

$$\frac{3}{4} \underset{\text{Kürzen } :2}{\overset{\text{Erweitern } \cdot 2}{=}} \frac{6}{8}$$

Durch Erweitern und Kürzen ändert sich der Wert des Bruches nicht.

Kürzen	**Erweitern**
$\frac{3}{15} = \frac{3:\mathbf{3}}{15:\mathbf{3}} = \frac{1}{5}$; $\frac{6}{24} = \frac{6:\mathbf{2}}{24:\mathbf{2}} = \frac{3}{12} = \frac{3:\mathbf{3}}{12:\mathbf{3}} = \frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} = \frac{1\cdot\mathbf{5}}{4\cdot\mathbf{5}} = \frac{5}{20}$; $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot\mathbf{3}}{5\cdot\mathbf{3}} = \frac{6}{15}$

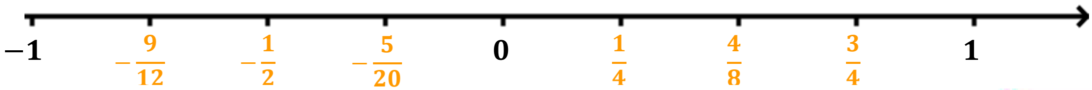
M 6.4

Rationale Zahlen

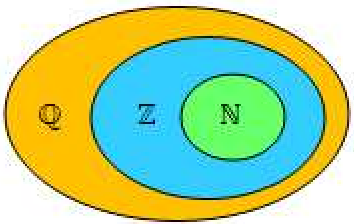
Zahlen, die man durch Brüche angeben kann, heißen **Bruchzahlen**. Eine Bruchzahl kann durch verschiedene wertgleiche Brüche angegeben werden.

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20} = \cdots; \quad \frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \cdots; \quad -\frac{3}{4} = -\frac{9}{12} = \cdots; \quad 2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \cdots$$

Jede Bruchzahl hat einen Platz auf der Zahlengeraden.



Die positiven und die negativen Bruchzahlen bilden zusammen mit der 0 die **Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$**.



Jeder Bruch kann als **Q**uotient geschrieben werden:

$$\frac{3}{5} = 3 : 5$$

M 6.5

Vergleichen rationaler Zahlen

Brüche können verglichen werden, indem man sie durch Erweitern oder Kürzen auf denselben Nenner oder auf denselben Zähler bringt:

- **Gleiche Nenner:** Der Bruch mit dem größeren Zähler ist größer
$$\frac{5}{7} > \frac{3}{7}$$
- **Gleiche Zähler:** Der Bruch mit dem kleineren Nenner ist größer
$$\frac{2}{3} > \frac{2}{5}$$

$$\frac{5}{12} = \frac{15}{36} \;;\; \frac{7}{18} = \frac{14}{36} \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{12} > \frac{7}{18}$$

Von zwei rationalen Zahlen ist diejenige größer, die weiter rechts auf der Zahlengeraden liegt.

M 6.6

Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche

Bei **Dezimalbrüchen** bedeutet die erste Stelle nach dem Komma Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel,...

$$\mathbf{0{,}032} = \frac{32}{1000}$$

...	H	Z	T	,	z	h	t	zt	...
			0	,	**0**	**3**	**2**		

Methoden zum Umwandeln von Brüchen in Dezimalbrüche

Erweitern oder Kürzen zu einem Bruch mit Stufenzahl im Nenner	$\frac{2}{50} = \frac{4}{100} = 0{,}04$	$\frac{63}{70} = \frac{9}{10} = 0{,}9$
Schriftliches Dividieren	$\frac{1}{8} = 1 : 8 = 0{,}125$ **Endlicher Dezimalbruch**	$\frac{1}{6} = 1 : 6 = 0{,}16666\ldots = 0{,}1\overline{6}$ **Unendlicher periodischer Dezimalbruch**

Enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruches nur die Primfaktoren 2 und 5, ergibt sich ein endlicher Dezimalbruch, andernfalls ein unendlicher.

M 6.7

Relative Häufigkeit

Absolute Häufigkeit: Sie gibt an, wie oft ein bestimmtes Ergebnis auftritt.

Relative Häufigkeit: Sie gibt an, bei welchem Anteil aller Versuche das bestimmte Ergebnis auftritt.

$$\boldsymbol{Relative\ Häufigkeit = \frac{absolute\ Häufigkeit}{Gesamtzahl\ der\ Versuche}}$$

Bei der Durchführung eines **Zufallsexperiments** tritt genau ein Ergebnis von mehreren möglichen Ergebnissen ein. Welches Ergebnis auftreten wird, lässt sich nicht vorhersagen.

Zufallsexperiment: 5-mal würfeln **Ergebnisse**: 

Absolute Häufigkeit für das Ergebnis „2“: $\mathbf{2}$ Relative Häufigkeit für das Ergebnis „2“: $\mathbf{\frac{2}{5} = 40\%}$

Wiederholt man ein Zufallsexperiment sehr oft, so pendelt sich die relative Häufigkeit für jedes Ergebnis um einen bestimmten Wert ein (**empirisches Gesetz der großen Zahlen**).

M 6.8

Addition und Subtraktion von Brüchen

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+cb}{bd}$$

Gleichnamige Brüche
Zähler plus (minus) Zähler, Nenner beibehalten

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{7}=\frac{6}{7} \qquad \frac{5}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$$

Ungleichnamige Brüche
1. Brüche gleichnamig machen
2. Gleichnamige Brüche addieren (subtrahieren)

$$\frac{1}{6}+\frac{3}{4}=\frac{2}{12}+\frac{9}{12}=\frac{11}{12} \qquad \frac{5}{6}-\frac{3}{14}=\frac{35}{42}-\frac{9}{42}=\frac{26}{42}=\frac{13}{21}$$

Der kleinstmögliche gemeinsame Nenner ist das kgV aller Nenner. Er heißt **Hauptnenner**.

Gemischte Zahlen
1. Gemischte Zahlen als Summen schreiben/denken
2. Ganze Zahlen zusammenrechnen, Brüche zusammenrechnen

$$3\frac{2}{5}+2\frac{1}{2}=3+\frac{2}{5}+2+\frac{1}{2}=3+2+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}=5+\frac{4}{10}+\frac{5}{10}=5\frac{9}{10}$$

$$5\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=3\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$$

M 6.9

Multiplikation von Brüchen

$$\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Bruch mal natürliche Zahl
Zähler mal Zahl, Nenner beibehalten

$$\frac{2}{7} \cdot 3 = \frac{2 \cdot 3}{7} = \frac{6}{7}$$

Bruch mal Bruch
Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 5} = \frac{2}{5}$$

Gemischte Zahlen

1. in unechte Brüche umwandeln
2. multiplizieren

$$3\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{2} = \frac{18}{5} \cdot \frac{5}{2} = \frac{18 \cdot 5}{5 \cdot 2} = 9$$

„Von“ bedeutet in der Bruchteil-Regel „mal“

$$\frac{3}{4}\ von\ 36 = \frac{3}{4} \cdot 36 = \frac{3 \cdot 36}{4} = 3 \cdot 9 = 27$$

M 6.10

Division von Brüchen

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$$

Bruch durch natürliche Zahl
Nenner mal Zahl, Zähler beibehalten

$$\frac{2}{7} : 3 = \frac{2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$$

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Bruch durch Bruch
mit dem Kehrbruch multiplizieren

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9} = 1\frac{1}{9}$$

Doppelbrüche
In Division umschreiben

$$\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2}{5} : \frac{3}{7} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{15}$$

M 6.11

Rechnen mit Dezimalbrüchen

Addieren und Subtrahieren

Zahlen untereinander schreiben, so dass Komma unter Komma steht und stellenweise rechnen.

$$\begin{array}{r} 23{,}075 \\ \underline{+0{,}0152} \\ 23{,}0902 \end{array}$$

Multiplizieren

1. Zahlen ohne Rücksicht auf die Kommas multiplizieren
2. Im Ergebnis das Komma so setzen, dass es so viele Nachkommastellen hat wie beide Faktoren zusammen

$$0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}075$$

Dividieren

1. In Dividend und Divisor das Komma so weit nach rechts verschieben, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist
2. Überschreitet man beim Dividieren im Dividenden das Komma, wird im Ergebnis ein Komma gesetzt

$$0{,}015 : 0{,}75 = 1{,}5 : 75 = 0{,}02$$

M 6.12

Einteilung von Brüchen und Dezimalbrüchen

Brüche	**Echte Brüche** Zähler ist kleiner als Nenner	$\frac{2}{3}$
	Unechte Brüche Zähler ist größer als Nenner → Umwandlung in **gemischte Zahlen** (=Summe aus ganzer Zahl und echtem Bruch) möglich	$\frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

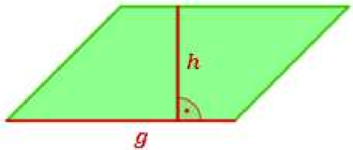
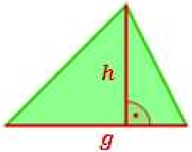
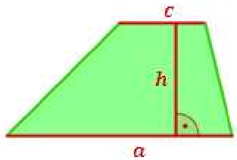
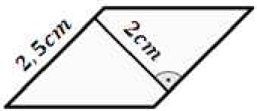
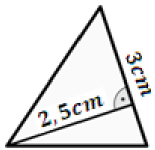
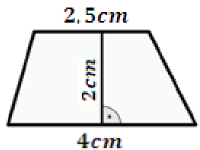
Dezimalbrüche	**Endliche Dezimalbrüche**	$\frac{13}{40} = 0{,}325$
	Unendliche periodische Dezimalbrüche	$\frac{4}{33} = 0,\overline{12}$ **reinperiodisch**
		$\frac{5}{12} = 0{,}41\overline{6}$ **gemischtperiodisch**

Wichtige Umrechnungen

$\frac{1}{2} = 0,5 = 50\%$	$\frac{1}{4} = 0,25 = 25\%$	$\frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$	$\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$
$\frac{1}{3} = 0,\overline{3} = 33,\overline{3}\%$	$\frac{2}{3} = 0,\overline{6} = 66,\overline{6}\%$	$\frac{1}{6} = 0,1\overline{6} = 16,\overline{6}\%$	$\frac{1}{9} = 0,\overline{1} = 11,\overline{1}\%$
$\frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$	$\frac{2}{5} = 0,4 = 40\%$	$\frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$	$\frac{4}{5} = 0,8 = 80\%$

M 6.13

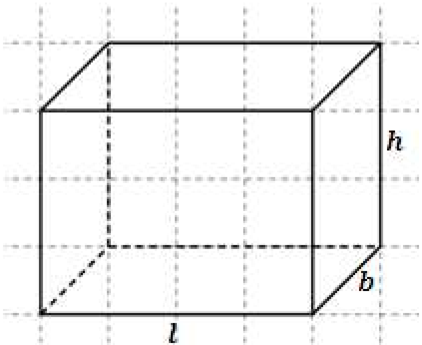
Flächenformeln

Parallelogramm	Dreieck	Trapez
		
Parallelogrammfläche = Grundlinie · zugehöriger Höhe	Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} \cdot$ Grundlinie · zugehöriger Höhe	Trapezfläche $= \frac{1}{2} \cdot$ (Summe der parallelen Seiten) · Höhe
$\boldsymbol{A_P = g \cdot h}$	$\boldsymbol{A_D = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{g} \cdot \mathbf{h}}$	$\boldsymbol{A_T = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h}$
 $A = 2{,}5cm \cdot 2cm = 5cm^2$	 $A = \frac{1}{2} \cdot 3cm \cdot 2{,}5cm = 3{,}75cm^2$	 $A = \frac{1}{2} \cdot (4cm + 2{,}5cm) \cdot 2cm = 6{,}5cm^2$

M 6.14

Schrägbilder

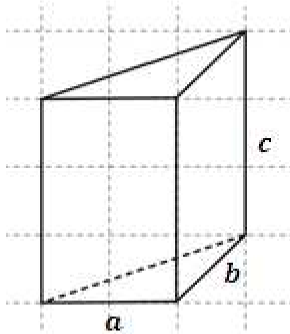
Die räumliche Darstellung eines Körpers nennt man **Schrägbild**.



$l = 2cm, b = 1cm, h = 1{,}5cm$

Zeichenregeln

- Die Vorderfläche wird in wahrer Größe gezeichnet.
- Nach hinten verlaufende Kanten werden parallel zu den Kästchendiagonalen und verkürzt gezeichnet:
  $1cm \triangleq 1\,Kästchendiagonale$



$a = 1cm, b = 1cm, c = 1{,}5cm$

Beachte:

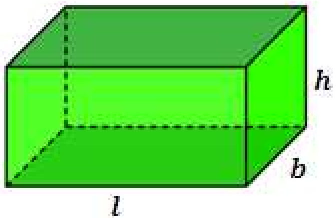
- Parallele Kanten bleiben parallel
- Senkrechte Kanten stehen im Schrägbild nicht mehr unbedingt senkrecht

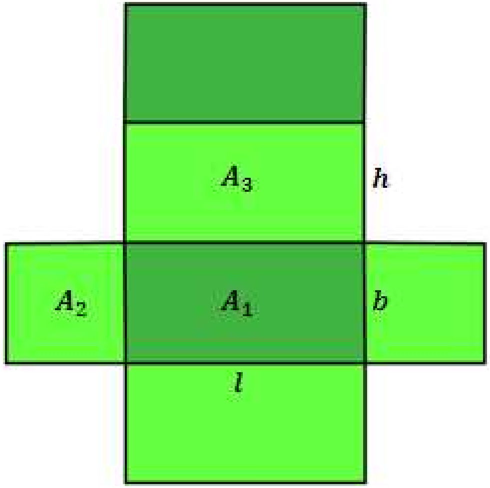
M 6.15

Oberflächeninhalt

Der **Oberflächeninhalt O** eines Körpers ist gleich dem Flächeninhalt seines **Netzes**.

Beispiel: Schrägbild und Netz eines Quaders





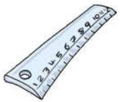
$$\boldsymbol{O = 2A_1 + 2A_2 + 2A_3 = 2 \cdot (l \cdot b + b \cdot h + l \cdot h)}$$

$$l = 2cm, b = 1cm, h = 1cm$$

$$O = 2 \cdot (A_1 + A_2 + A_3) = 2 \cdot (2cm^2 + 1cm^2 + 2cm^2) = 10cm^2$$

M 6.16

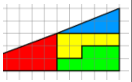
Umrechnung von Länge, Fläche und Volumen



Länge

Umrechnungszahl 10

$1km = 1000m$	$1m = 10dm$	$1dm = 10cm$	$1cm = 10mm$



Fläche

Umrechnungszahl 100

$1km^2 = 100ha$	$1ha = 100a$	$1a = 100m^2$	$1m^2 = 100dm^2$	$1dm^2 = 100cm^2$	$1cm^2 = 100mm^2$

Volumen

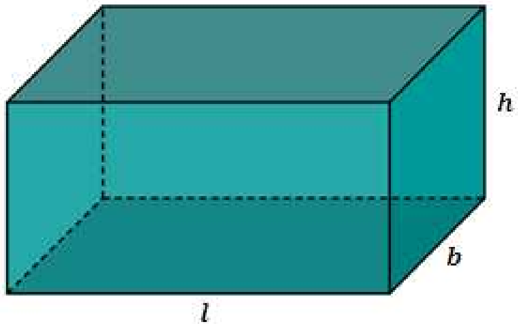
Umrechnungszahl 1000

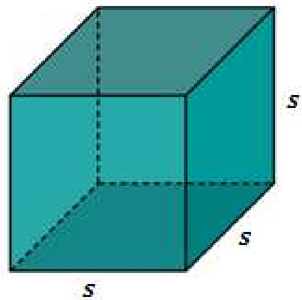
$1m^3 = 1000dm^3$	$1dm^3 = 1000cm^3$	$1cm^3 = 1000mm^3$

Speziell:	$1l = 1dm^3$	$1ml = 1cm^3$	$1hl = 100l$	$1l = 1000ml$

M 6.17

Volumen des Quaders





$\boldsymbol{Quadervolumen = Länge \cdot Breite \cdot Höhe}$	$\boldsymbol{Würfelvolumen = Seite \cdot Seite \cdot Seite}$
$\boldsymbol{V = l \cdot b \cdot h}$	$\boldsymbol{V = s \cdot s \cdot s = s^3}$

$l = 2cm, b = 3cm, h = 1{,}5cm$: $V = l \cdot b \cdot h = 2cm \cdot 3cm \cdot 1{,}5cm = 9cm^3$

$s = 3cm$: $V = s^3 = (3cm)^3 = 27cm^3$

M 6.18

Prozentrechnung

$$25\% \; von \; 16€ \; = \; 4€$$

Prozentsatz = Bruchteil vom Ganzen • **Grundwert** = das Ganze = **Prozentwert** = wie viel der Anteil ausmacht

PW

PS • GW

3 Aufgabentypen		
Prozentsatz gesucht	**Grundwert gesucht**	**Prozentwert gesucht**
Wie viel Prozent sind 8 von 40? $\frac{8}{40} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$	15% vom Grundwert sind 9€ 5% vom Grundwert sind 3€ 100% vom Grundwert sind: $3€ \cdot 20 = 60€$	Wie viel sind 20% von $55kg$? $20\% \; von \; 55kg =$ $= 20\% \cdot 55kg = \frac{1}{5} \cdot 55kg =$ $= 11kg$

M 6.19

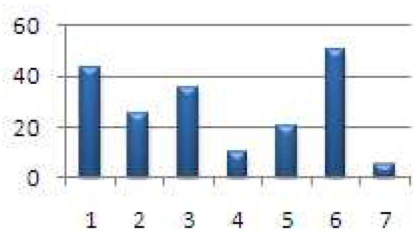
Schlussrechnung (Dreisatz)

$3kg$ Äpfel kosten $2,40$€. Wie viel kosten $5kg$?	3 Dachdecker brauchen für ein Dach 5 Stunden. Wie lange brauchen fünf Dachdecker?
$3kg$ kosten 2,40€ $:3$ $:3$ $1kg$ kostet $2{,}40€ : 3 = 0{,}80€$ $\cdot 5$ $\cdot 5$ $5kg$ kosten $0{,}80€ \cdot 5 = \mathbf{4,00€}$	3 Dachdecker brauchen $5h$ $:3$ $\cdot 3$ 1 Dachdecker braucht $5h \cdot 3 = 15h$ $\cdot 5$ $:5$ 5 Dachdecker brauchen $15h : 5 = \mathbf{3h}$

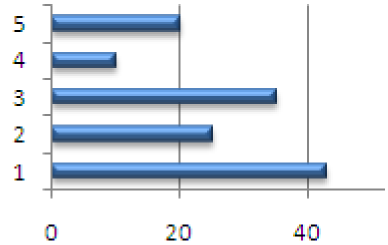
M 6.20

Diagramme

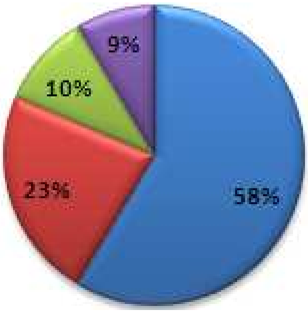
Säulendiagramm



Balkendiagramm



Kreisdiagramm



$$100\% \triangleq 360^\circ$$
$$1\% \triangleq 3{,}6^\circ$$

Prozentstreifen