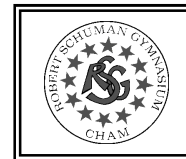
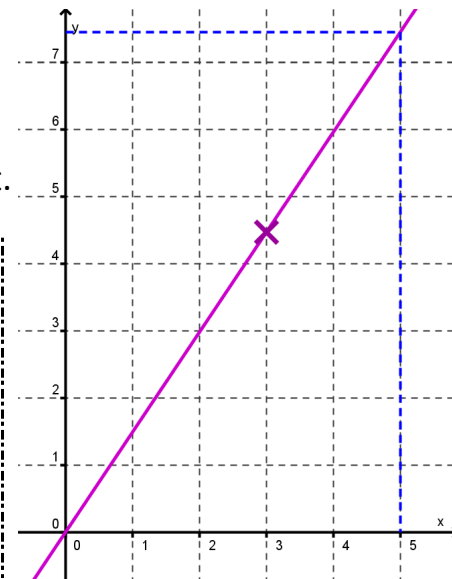


# Direkte Proportionalität



Zwei einander zugeordnete Größen  $x$  und  $y$  sind (direkt) **proportional**, wenn

- zum  $n$ -fachen Wert von  $x$  der  $n$ -fache Wert von  $y$  gehört.
- der Quotient  $\frac{y}{x} = q$  für alle Wertepaare gleich ist.  
(= **Proportionalitätsfaktor  $q$** )
- $y = q \cdot x$  ist.
- der Graph der Zuordnung eine Ursprungsgerade ist.



3 Ananas kosten 4,47€. Wie viel kosten 5 Ananas?

Die Zuordnung **Anzahl( $x$ )**  $\mapsto$  **Preis( $y$ )** ist proportional.

**Dreisatz**

$$\begin{array}{l} :3 \quad \left( \begin{array}{l} 3 \mapsto 4,47\text{€} \\ 1 \mapsto 1,49\text{€} \end{array} \right) :3 \\ \cdot 5 \quad \left( \begin{array}{l} 5 \mapsto 7,45\text{€} \end{array} \right) \cdot 5 \end{array}$$

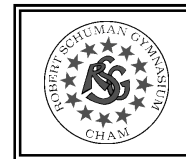
oder

**Proportionalitätsfaktor**

$$q = \frac{4,47\text{€}}{3} = 1,49\text{€}$$

$$y = q \cdot x = 1,49\text{€} \cdot 5 = 7,45\text{€}$$

# Indirekte Proportionalität



Zwei einander zugeordnete Größen  $x$  und  $y$  sind **indirekt** (oder „umgekehrt“) **proportional**, wenn

- zum  $n$ -fachen Wert von  $x$  der  $\frac{1}{n}$ -fache Wert von  $y$  gehört.
- das Produkt  $x \cdot y = p$  für alle Wertepaare gleich ist.
- $y = \frac{p}{x}$  ist.
- der Graph der Zuordnung eine Hyperbel ist.

Mit 3 Schläuchen ist ein Schwimmbecken in 2,5 Stunden gefüllt. Wie lange dauert es mit 5 Schläuchen?

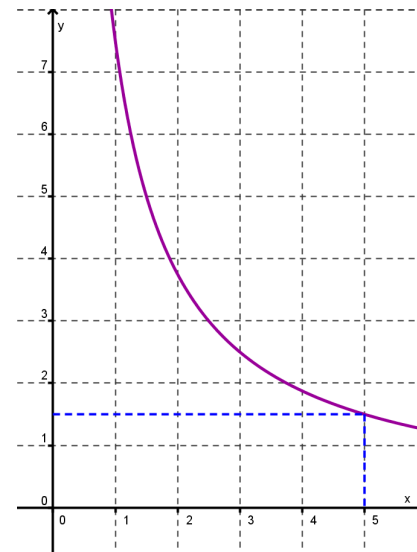
Die Zuordnung **Anzahl**( $x$ )  $\mapsto$  **Stunden**( $y$ ) ist indirekt proportional.

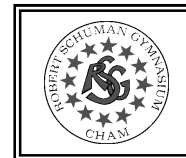
**Dreisatz**

$$\begin{array}{lcl}
 :3 & \left( \begin{array}{l} 3 \mapsto 2,5h \\ 1 \mapsto 7,5h \end{array} \right) & \cdot 3 \\
 \cdot 5 & \left( \begin{array}{l} 5 \mapsto 1,5h \end{array} \right) & :5
 \end{array}$$

oder

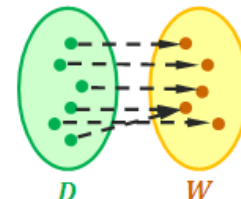
$$\begin{aligned}
 p &= 3 \cdot 2,5h = 7,5h \\
 y &= \frac{p}{x} = \frac{7,5h}{5} = 1,5h
 \end{aligned}$$





Eine Zuordnung  $x \mapsto y$ , die jedem Wert für  $x$  jeweils nur einen einzigen Wert für  $y$  zuordnet, heißt **Funktion**.

- Der von  $x$  abhängige Wert  $f(x)$  bzw.  $y$  heißt **Funktionswert**.
- Die Menge aller zulässigen  $x$ -Werte heißt **Definitionsmenge  $D$** .
- Die Menge aller möglichen Funktionswerte heißt **Wertemenge  $W$** .

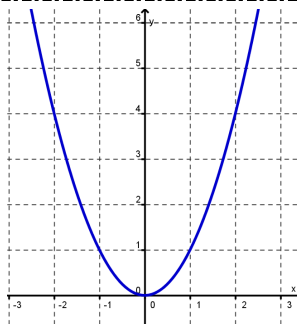


Funktion:  $x^2$

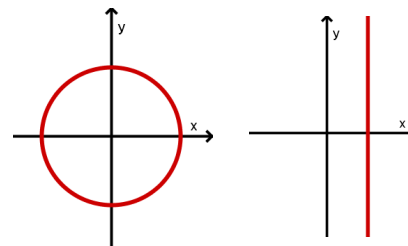
Schreibweisen:

- $f: x \mapsto x^2$
  - $f(x) = x^2$
  - $y = x^2$
- $D_f = \mathbb{Q}$   
 $W_f = \mathbb{Q}_0^+$

Graph:

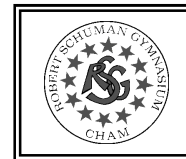


Keine Funktionen



M 8.4

## Umfang und Flächeninhalt des Kreises



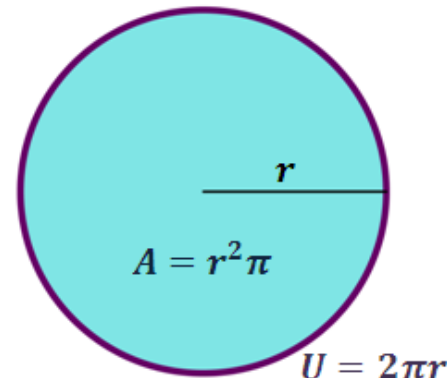
Umfang

$$U = \pi \cdot d$$

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Flächeninhalt

$$A = r^2 \cdot \pi$$



→ Der Durchmesser  $d$  ist direkt proportional zum Umfang  $U$ .  
 $\pi$  ist der Proportionalitätsfaktor.

**Kreiszahl**  $\pi = 3,141592654 \dots$  ( $\pi$  ist keine rationale Zahl)

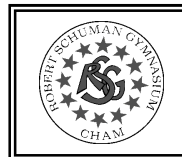


$k(M; 3cm)$  [„Kreis um  $M$  mit Radius  $3cm$ “]

$$\Rightarrow U = 2\pi \cdot 3cm \approx 18,85cm$$

$$\Rightarrow A = (3cm)^2 \cdot \pi \approx 28,27cm^2$$

# Lineare Funktionen



Funktionsgleichung:

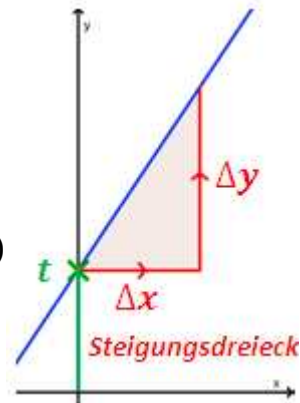
$$y = mx + t$$

Steigung

y-Achsenabschnitt

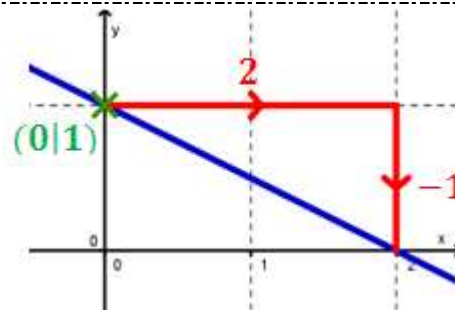
**Graph:** Gerade mit der Steigung  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  durch den Punkt  $(0|t)$

Ein  $x$ -Wert, für den der Funktionswert  $y$  Null ist, heißt **Nullstelle**.

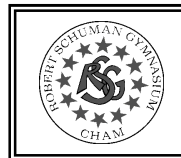


**Zeichne den Graphen der Funktion**  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

- Markiere den Punkt  $(0|1)$ .
- Trage von dort den Nenner von  $m = -\frac{1}{2}$  in  $x$ -Richtung ab
- und trage dann den Zähler von  $m = -\frac{1}{2}$  in  $y$ -Richtung ab.



# Aufstellen der Geradengleichung



Ansatz:  $y = mx + t$

1. Schritt: Bestimme die **Steigung  $m$**
2. Schritt: Bestimme den  **$y$ -Achsenabschnitt  $t$**

Bestimme den Funktionsterm der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte  $A(2|3)$  und  $B(4|-1)$  verläuft.

Ansatz:  $y = mx + t$

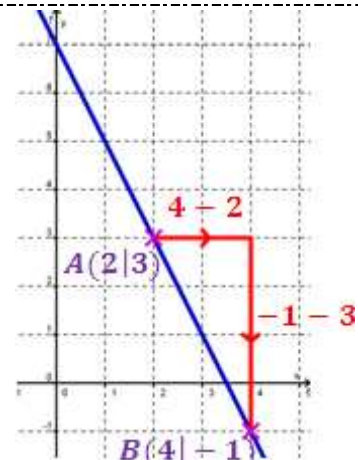
1. Schritt:

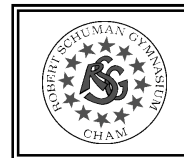
$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 3}{4 - 2} = -\frac{4}{2} = -2$$

2. Schritt: Setze  $A$  oder  $B$  in  $y = -2x + t$  ein:

$$3 = -2 \cdot 2 + t \Rightarrow t = 7$$

$$\Rightarrow y = -2x + 7$$





Ungleichungen kann man wie Gleichungen schrittweise vereinfachen.



**Vorsicht:** Bei Multiplikation oder Division mit einer **negativen Zahl**, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!

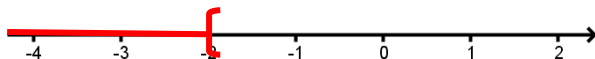


Die Lösungsmenge kann man in **Mengen- oder Intervallschreibweise** angeben.

$$\begin{aligned} -3x &> 6 \quad / : (-3) \\ x &< -2 \end{aligned}$$

$$L = \{x | x < -2\}$$

$$L = ]-\infty; -2[$$



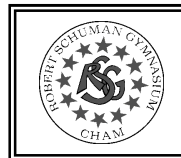
$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}x &\leq 0,5 \quad / \cdot (-4) \\ x &\geq -2 \end{aligned}$$

$$L = \{x | x \geq -2\}$$

$$L = [-2; \infty[$$



# Lineare Gleichungssysteme I



Zwei lineare Gleichungen mit zwei gleichen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen**.

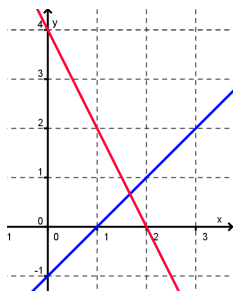
$$(I) \quad ax + by = c$$

$$(II) \quad dx + ey = f$$

Die Gleichungen lassen sich durch Geraden graphisch darstellen (→ Auflösen nach  $y$ ).

$$(I) \quad y - x = 1$$

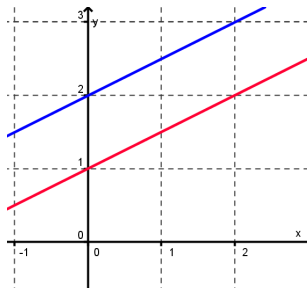
$$(II) \quad y + 2x = 4$$



*eine Lösung*

$$(I) \quad 2y - x = 4$$

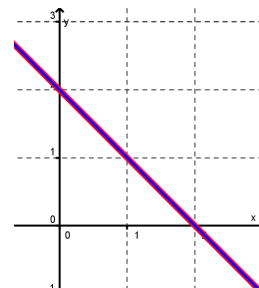
$$(II) \quad 2y - x = 2$$



*keine Lösung*

$$(I) \quad 2,5x + 2,5y = 5$$

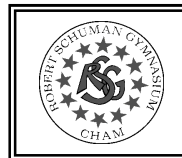
$$(II) \quad x + y = 2$$



*Unendlich viele Lösungen*



## Lineare Gleichungssysteme II

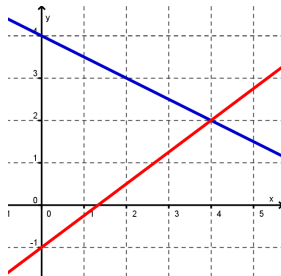


$$\begin{array}{ll} (I) & x + 2y = 8 \\ (II) & 3x - 4y = 4 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} (I') & y = -0,5x + 4 \\ (II') & y = 0,75x - 1 \end{array}$$

**Graphische Lösung**

$$\begin{array}{l} (I') y = -0,5x + 4 \\ (II') y = 0,75x - 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow L = \{(4; 2)\}$$

**Gleichsetzungsverfahren**

$$\begin{array}{l} (I') = (II') \\ -0,5x + 4 = 0,75x - 1 \quad / -0,75x - 4 \\ -1,25x = -5 \quad / : (-1,25) \\ x = 4 \end{array}$$

$$y = -0,5 \cdot 4 + 4 = 2$$

$$\Rightarrow L = \{(4; 2)\}$$

**Einsetzungsverfahren**

$$\begin{array}{l} (II') \text{ in } (I): x + 2(0,75x - 1) = 8 \\ 2,5x - 2 = 8 \quad / +2 \\ 2,5x = 10 \quad / : 2,5 \\ x = 4 \end{array}$$

$$y = 0,75 \cdot 4 - 1 = 2$$

$$\Rightarrow L = \{(4; 2)\}$$

**Additionsverfahren**

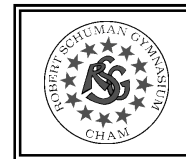
$$2 \cdot (I) + (II): 2x + 4y + 3x - 4y = 16 + 4$$

$$\begin{array}{l} 5x = 20 \quad / : 5 \\ x = 4 \end{array}$$

$$4 + 2y = 8 \Rightarrow y = 2$$

$$\Rightarrow L = \{(4; 2)\}$$

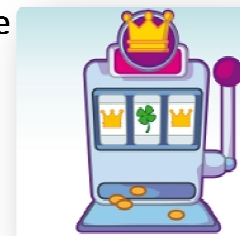
# Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung



Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse möglich sind.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnismenge  $\Omega$** .

Eine Teilmenge der Ergebnismenge  $\Omega$  nennt man **Ereignis**.



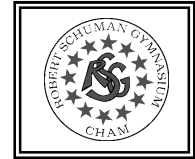
## Zählprinzip

***Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Gesamtzahl der verschiedenen Möglichkeiten, indem man die Anzahlen der verschiedenen Möglichkeiten in den einzelnen Stufen multipliziert.***

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs Personen auf sechs Stühlen anzuordnen?

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$$





Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**.

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}} = \frac{\text{Anzahl der Elemente von } A}{\text{Anzahl der Elemente von } \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

**Einmaliger Würfelwurf**

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad |\Omega| = 6$$

$$A: \text{"Augenzahl ist gerade"}, \quad A = \{2; 4; 6\}, \quad |A| = 3$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

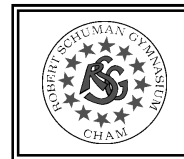
**Einmaliger Münzwurf**

$$\Omega = \{K; Z\}, \quad |\Omega| = 2$$

$$P(K) = P(Z) = \frac{1}{2} = 50\%$$



# Gebrochen rationale Funktionen – Bruchterme



Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, heißen **Bruchterme**.

$$\frac{1}{x}; \quad \frac{3}{x}; \quad \frac{5}{x-1}; \quad \frac{z-3}{z^2}; \quad \frac{3a-1}{a+2}$$

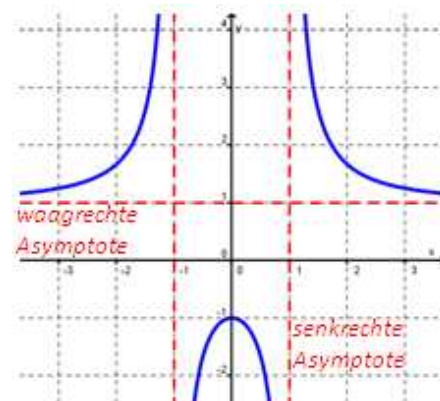
Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, heißen **gebrochen rationale Funktionen**.

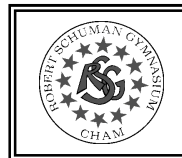
Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

Für die Variablen dürfen keine Zahlen eingesetzt werden, für die der Nenner null wird. Diese Zahlen nennt man **Definitionslücken**. Sie gehören nicht zur Definitionsmenge der Funktion.

Geraden, an die sich der Graph beliebig genau annähert, nennt man **Asymptoten**.

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 1} + 1; \quad D_f = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 1\}$$



**Kürzen**

- Zähler und Nenner faktorisieren
- Gleiche Terme kürzen

**Nie aus Summen kürzen!**

$$\frac{3x - 5x^2}{7x^3 - x} = \frac{x(3 - 5x)}{x(7x^2 - 1)} = \frac{3 - 5x}{7x^2 - 1}$$

**Addieren und Subtrahieren**

- Bruchterme gleichnamig machen
- Zähler addieren/subtrahieren

$$\begin{aligned} \frac{3}{x-1} + \frac{4}{3x-2} &= \\ &= \frac{3(3x-2)}{(x-1)(3x-2)} + \frac{4(x-1)}{(x-1)(3x-2)} = \\ &= \frac{9x-6+4x-4}{(x-1)(3x-2)} = \frac{13x-10}{(x-1)(3x-2)} \end{aligned}$$

**Multiplizieren**

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{3-x}{2x} \cdot \frac{4x}{x-1} = \frac{(3-x) \cdot 4x}{2x(x-1)}$$

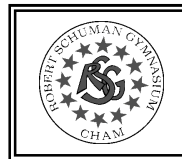
**Dividieren**

Multiplizieren mit dem Kehrbruch

$$\frac{2}{3x} : \frac{4-x}{x^2} = \frac{2}{3x} \cdot \frac{x^2}{4-x} = \frac{2x^2}{3x(4-x)}$$

M 8.14

## Potenzen mit ganzzahligen Exponenten



$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$$

für jede natürliche Zahl  $n$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

für jede natürliche Zahl  $n$ ,  $a \neq 0$

$$a^0 = 1$$

für jede rationale Zahl  $a \neq 0$

$$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000; \quad 10^{-4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10000}; \quad 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}; \quad 5^0 = 1$$

### Gleitkommadarstellung

$$a \cdot 10^n$$

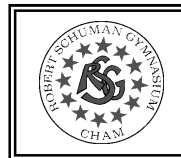
$1 \leq a < 10$        $n$  gibt an, um wie viele Stellen man das Komma verschieben muss

$$3,2 \cdot 10^5 = 320\,000;$$

$$3,2 \cdot 10^{-5} = 0,000032$$

M 8.15

# Rechnen mit Potenzen



## Multiplizieren

*Hochzahlen addieren*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$$

$$x^2 \cdot x^3 = x^5$$

## Dividieren

*Hochzahlen subtrahieren*

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

$$4^7 : 4^3 = 4^{7-3} = 4^4$$

$$x^6 : x^2 = x^4$$

## Potenzieren einer Potenz

*Hochzahlen multiplizieren*

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}$$

$$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$$

$$(b^3)^7 = b^{21}$$

## Potenzieren von Produkten und Quotienten

*Hochzahlen verteilen*

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

$$(5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$$

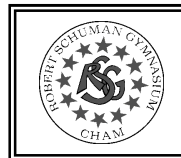
$$(pq)^2 = p^2 \cdot q^2$$

$$(a : b)^n = a^n : b^n$$

$$(4 : 2)^7 = 4^7 : 2^7$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$$

**Vorsicht:**  $(3x^2 + 7)^2 = (3x^2 + 7)(3x^2 + 7) = 9x^4 + 42x^2 + 49 \rightarrow$  *kein Verteilen der Hochzahlen bei Summen*



**1. Schritt: Definitionsmenge** bestimmen



**2. Schritt:** Beide Seiten mit dem **gemeinsamen Nenner** aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen



**3. Schritt:** Bruchtermfreie Gleichung lösen



**4. Schritt:** Überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört



**5. Schritt: Lösungsmenge** angeben

$$\frac{2}{6-x} = \frac{1}{x}$$

$$D = \mathbb{Q} \setminus \{0; 6\}$$

$$\frac{2}{6-x} = \frac{1}{x} \quad / \cdot x(6-x)$$

$$\frac{2x(6-x)}{6-x} = \frac{x(6-x)}{x}$$

$$2x = 6 - x \quad / +x$$

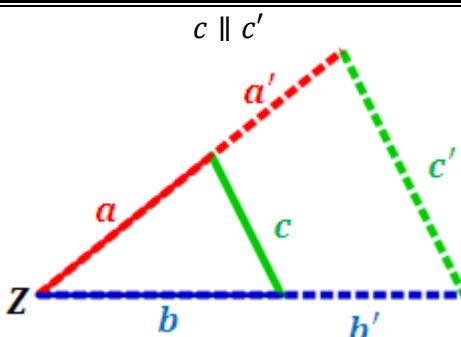
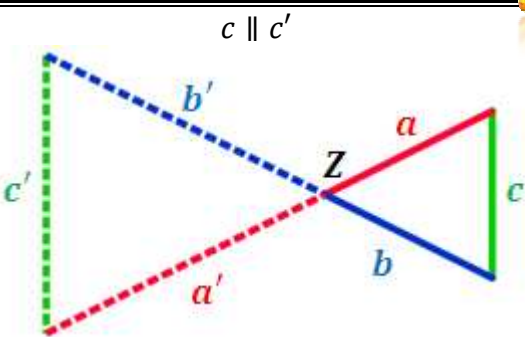
$$3x = 6 \quad / : 3$$

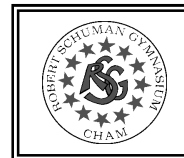
$$x = 2$$

$$2 \in D$$

$$\Rightarrow L = \{2\}$$



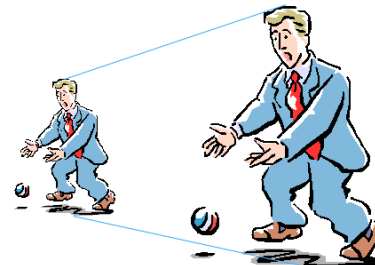
V-Figur	X-Figur
 <p style="text-align: center;"><math>c \parallel c''</math></p>	 <p style="text-align: center;"><math>c \parallel c''</math></p>
<b>1. Strahlensatz</b> $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a' - a} = \frac{b}{b' - b}$	<b>1. Strahlensatz</b> $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \quad \text{oder} \quad \frac{a}{a' + a} = \frac{b}{b' + b}$
<b>2. Strahlensatz</b> $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$	<b>2. Strahlensatz</b> $\frac{c}{c'} = \frac{a}{a'} \quad \frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$



Zwei Figuren  $F$  und  $G$  heißen **ähnlich** ( $F \sim G$ ), wenn man  $F$  so vergrößern oder verkleinern kann, dass die Bildfigur  $F'$  zu  $G$  kongruent ist.

Für ähnliche Figuren gilt:

- entsprechende Winkel sind gleich groß
- die Verhältnisse entsprechender Streckenlängen sind gleich



Dreiecke sind ähnlich, wenn bereits eine der beiden Eigenschaften erfüllt ist.

$$\alpha = 33,7^\circ$$

$$\beta = 82,9^\circ$$

$$\gamma = 63,4^\circ$$

