

M 5.1

Natürliche Zahlen und Zahlenstrahl



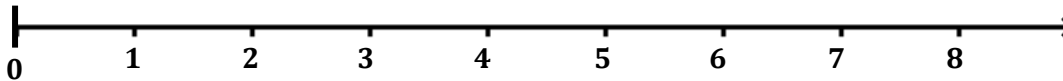
Die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... nennt man **natürliche Zahlen**: $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots\}$

Nimmt man auch die 0 hinzu, schreibt man:
 $\{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$

$\mathbb{N}_0 =$



Zahlenstrahl



Je weiter rechts eine Zahl auf dem Zahlenstrahl liegt, desto größer ist sie.



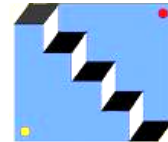


Große Zahlen kann man mit Hilfe der **Stellenwerttafel** leichter lesen:

...	Billionen			Milliarden			Millionen			Tausender					
...	HBio	ZBio	Bio	HMrd	ZMrd	Mrd	HMio	ZMio	Mio	HT	ZT	T	H	Z	E
	2	3	5	7	1	0	2	6	6	7	0	0	3	2	2

In Worten: *Zweihundertfünfunddreißig Billionen siebenhundertzehn Milliarden zweihundertsechszehzig Millionen siebenhunderttausenddreihundertzweiundzwanzig*

Die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, ... heißen **Stufenzahlen**.



Mit der **Potenzschreibweise** kann man sie kürzer schreiben:

$$\begin{aligned}
 100 &= 10 \cdot 10 && = 10^2 \\
 1000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 && = 10^3 \\
 10000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 && = 10^4 \\
 100000 &= 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 && = 10^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 1 \text{ Million} &= 10^6 \\
 1 \text{ Milliarde} &= 10^9 \\
 1 \text{ Billion} &= 10^{12} \\
 1 \text{ Billiarde} &= 10^{15} \\
 1 \text{ Trillion} &= 10^{18} \\
 1 \text{ Trilliarde} &= 10^{21}
 \end{aligned}$$



Beim Runden einer Zahl auf eine bestimmte Stelle betrachtet man die rechts von dieser Stelle stehende Ziffer:

- Ist diese Ziffer eine **0, 1, 2, 3** oder **4**, so wird **abgerundet**.
- Ist diese Ziffer eine **5, 6, 7, 8** oder **9**, so wird **aufgerundet**.



Man verwendet das Zeichen „ \approx “ („ist ungefähr gleich“).

	5368	10745
Runden auf Zehner	\approx 53 7 0	\approx 107 5 0
Runden auf Hunderter	\approx 5 4 00	\approx 10 7 00
Runden auf Tausender	\approx 5 000	\approx 11 000

M 5.4

Fachbegriffe für die Rechenarten



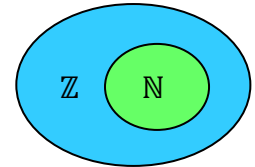
Beispiel	Name des Terms	Die erste Zahl heißt	Die zweite Zahl heißt	Rechenart
$5 + 3$	Summe	1. Summand	2. Summand	Addition
$5 - 3$	Differenz	Minuend	Subtrahend	Subtraktion
$5 \cdot 3$	Produkt	1. Faktor	2. Faktor	Multiplikation
$5 : 3$	Quotient	Dividend	Divisor	Division
5^3	Potenz	Basis	Exponent	Potenzieren

M 5.5

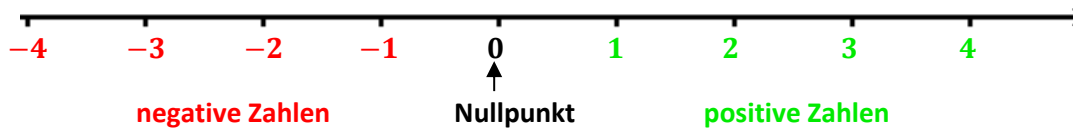
Ganze Zahlen und Zahlengerade



Die **natürlichen Zahlen** zusammen mit ihren **Gegenzahlen** und der Null nennt man **ganze Zahlen**: $\mathbb{Z} = \{ \dots -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots \}$



Zahlengerade



Den Abstand einer Zahl vom Nullpunkt nennt man **Betrag** der Zahl: $|-5| = 5$

$$|-4| = 4; \quad |4| = 4; \quad |-29| = 29; \quad |0| = 0$$

Gegenzahlen

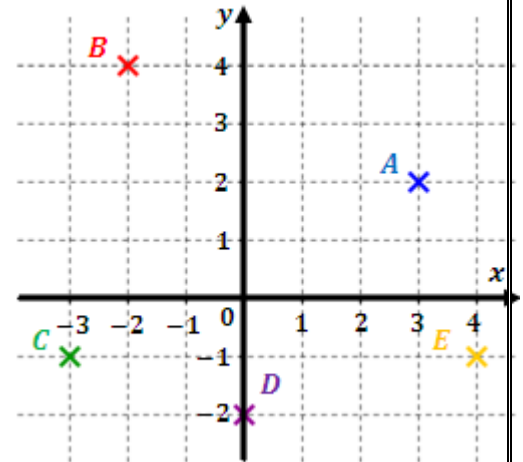


Ein **Koordinatensystem** besteht

- aus einer waagrechten Zahlengeraden: **x-Achse**
- und einer senkrechten Zahlengeraden: **y-Achse**

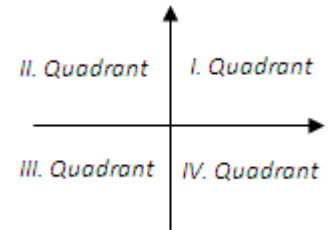
Der Schnittpunkt der Achsen heißt **Ursprung**.

Jeder Punkt im Koordinatensystem lässt sich durch ein Zahlenpaar beschreiben:



$A(3|2)$
 „vom Ursprung 3 waagrecht“ „dann 2 senkrecht“
 x-Koordinate y-Koordinate

$B(-2|4); \quad C(-3|-1); \quad D(0|-2); \quad E(4|-1)$

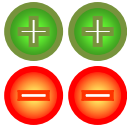


M 5.7

Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

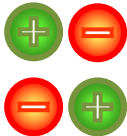


Addition bei gleichen Vorzeichen

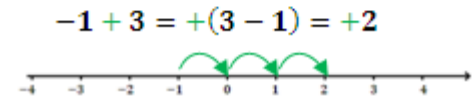
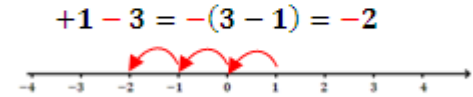
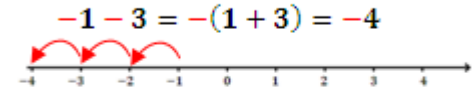
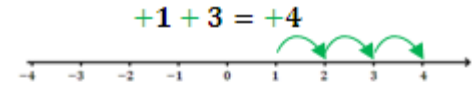


- Addiere die Beträge
- Das Ergebnis erhält das gemeinsame Vorzeichen

Addition bei unterschiedlichen Vorzeichen



- Subtrahiere den kleineren Betrag vom größeren Betrag
- Das Ergebnis erhält das Vorzeichen der Zahl mit dem größeren Betrag



Auflösen von Klammern


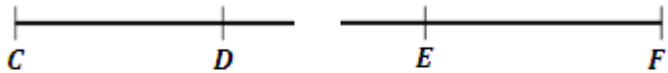
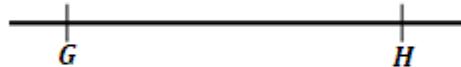
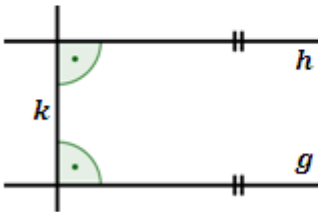
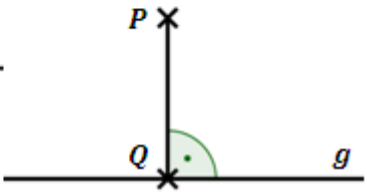
$$-4 + (+3) = -4 + 3$$

$$-4 + (-3) = -4 - 3$$

$$-4 - (-3) = -4 + 3$$

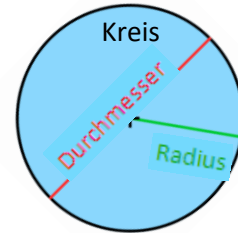
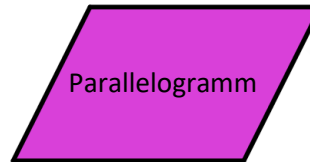
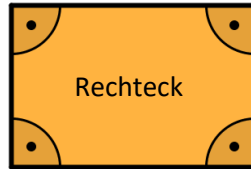
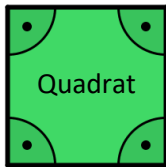
$$-4 - (+3) = -4 - 3$$



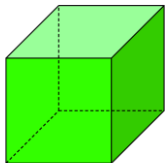
Strecke	\overline{AB}	
Streckenlänge	$ \overline{AB} = 5,2cm$	
Halbgerade	$[CD \text{ und } EF]$	
Gerade	GH	
g ist parallel zu h	$g \parallel h$	
g ist senkrecht zu k	$g \perp k$	
Abstand eines Punktes P von einer Geraden g	$ \overline{PQ} = 2,1cm$	



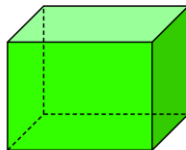
Ebene Figuren



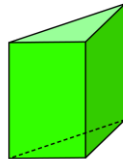
Räumliche Körper



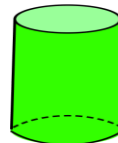
Würfel



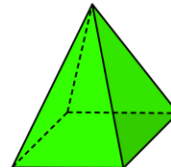
Quader



Prisma



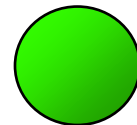
Zylinder



Pyramide



Kegel



Kugel

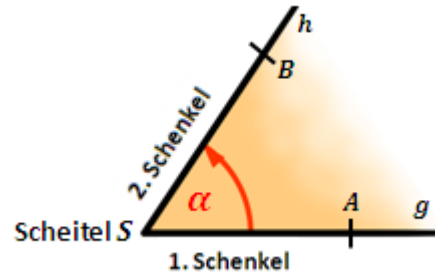


M 5.10

Winkel

Dreht sich eine Halbgerade gegen den Uhrzeigersinn um ihren Anfangspunkt S , so entsteht ein **Winkel**.

$$\alpha = \sphericalangle(g, h) = \sphericalangle ASB$$



α	alpha
β	beta
γ	gamma
δ	delta
ε	epsilon

Arten von Winkel

Spitzer Winkel	Rechter Winkel	Stumpfer Winkel	Gestreckter Winkel	Überstumpfer Winkel
$0^\circ < \alpha < 90^\circ$	$\alpha = 90^\circ$	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$	$\alpha = 180^\circ$	$180^\circ < \alpha < 360^\circ$

M 5.11

Rechnen mit 0 und 1



0		1	
$0 \cdot 5 = 0$	$5 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 5 = 5$	$5 \cdot 1 = 5$
$0 : 5 = 0$		$5 : 1 = 5$	

Nie durch Null dividieren!



M 5.12

Potenzieren



Für Produkte mit gleichen Faktoren gibt es eine Kurzschreibweise:

Die **Potenzschreibweise**

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{6 \text{ Faktoren}} = 2^6 \leftarrow \text{Exponent}$$

↑
Basis



Zehnerpotenzen

$10^1 = 10$	$10^2 = 100$	$10^3 = 1000$	$10^4 = 10000$	$10^5 = 100000$
-------------	--------------	---------------	----------------	-----------------

Quadratzahlen

$1^2 = 1$	$6^2 = 36$	$11^2 = 121$	$16^2 = 256$	$21^2 = 441$
$2^2 = 4$	$7^2 = 49$	$12^2 = 144$	$17^2 = 289$	$22^2 = 484$
$3^2 = 9$	$8^2 = 64$	$13^2 = 169$	$18^2 = 324$	$23^2 = 529$
$4^2 = 16$	$9^2 = 81$	$14^2 = 196$	$19^2 = 361$	$24^2 = 576$
$5^2 = 25$	$10^2 = 100$	$15^2 = 225$	$20^2 = 400$	$25^2 = 625$

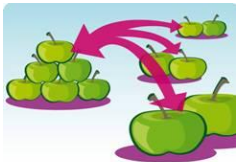
M 5.13

Primfaktorzerlegung



Eine **Primzahl** ist eine natürliche Zahl größer als 1, die nur durch 1 und sich selbst teilbar ist.

Jede natürliche Zahl ist entweder eine Primzahl oder lässt sich in ein Produkt aus Primzahlen zerlegen.



Diese eindeutige Zerlegung heißt **Primfaktorzerlegung**.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

$$165 = 3 \cdot 5 \cdot 11$$

$$20 = 4 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

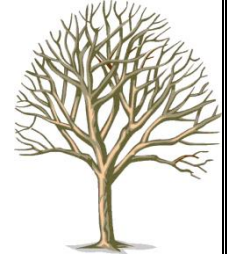
$$720 = 72 \cdot 10 = 8 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$$

M 5.14

Baumdiagramme



Situationen, bei denen man mehrere Dinge auswählen und miteinander kombinieren muss, kann man mit einem **Baumdiagramm** darstellen. Die Anzahl der Baumenden entspricht der Anzahl an Möglichkeiten.



Herr Huber hat für den Strandurlaub drei Hemden und zwei Shorts dabei. Wie viele Kombinationsmöglichkeiten hat er?



Es gibt $3 \cdot 2 = 6$ Möglichkeiten.

M 5.15

Multiplikation und Division ganzer Zahlen



1.

Multipliziere (Dividiere) die Beträge.

2.

- Sind die Vorzeichen **gleich**, gib dem Ergebnis ein **Plus**.
- Sind die Vorzeichen **verschieden**, gib dem Ergebnis ein **Minus**.



Multiplikation	Division
$3 \cdot 4 = 12$ $(-3) \cdot (-4) = 12$	$30 : 5 = 6$ $(-30) : (-5) = 6$
$3 \cdot (-4) = -12$ $(-3) \cdot 4 = -12$	$30 : (-5) = -6$ $(-30) : 5 = -6$

· ÷	+	-
+	+	-
-	-	+

M 5.16

Rechengesetze



Kommutativgesetz

Vertauschungsgesetz

$$a + b = b + a$$

oder

$$a \cdot b = b \cdot a$$

Assoziativgesetz

Verbindungsgesetz

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

oder

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Distributivgesetz

Verteilungsgesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

oder

$$(a + b) : c = a : c + b : c$$



Rechenvorteile

$$64 + (78 + 36) = 64 + (36 + 78) = (64 + 36) + 78 = 100 + 78 = 178$$

$$4 \cdot (27 \cdot 25) = 4 \cdot (25 \cdot 27) = (4 \cdot 25) \cdot 27 = 100 \cdot 27 = 2700$$

$$36 \cdot 13 + 36 \cdot 7 = 36 \cdot (13 + 7) = 36 \cdot 20 = 720$$

$$99 \cdot 43 = (100 - 1) \cdot 43 = 100 \cdot 43 - 1 \cdot 43 = 4300 - 43 = 4257$$

M 5.17

Vorrangregeln



Klammern

vor

Potenzen

vor

Punktrechnungen

vor

Strichrechnungen



Bei reinen Punkt- oder
Strichrechnungen:
Von links nach rechts
rechnen

Und was noch nicht zum
Rechnen dran, das
schreibe unverändert
an!

$$15 - 3 \cdot 4 + 5 = 15 - 12 + 5 = 3 + 5 = 8$$

$$30 - 3 \cdot 2^3 = 30 - 3 \cdot 8 = 30 - 24 = 6$$

$$25 - 2 \cdot (5 - 2)^2 = 25 - 2 \cdot 3^2 = 25 - 2 \cdot 9 = 25 - 18 = 7$$

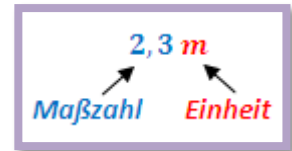
$$[5 + (4 - 1)^3] : 8 + 6 = [5 + 3^3] : 8 + 6 = [5 + 27] : 8 + 6 = 32 : 8 + 6 = 4 + 6 = 10$$

M 5.18

Größen



Größe	Einheiten				
Länge	1mm	1cm	1dm	1m	1km
	· 10		· 10		· 1000
Masse	1mg	1g	1kg	1t	
	· 1000		· 1000		· 1000
Geld	1ct	1€			
	· 100				
Zeit	1s	1min	1h	1d	
	· 60		· 60		· 24



$$1,5m = 15dm; \quad 3800mm = 380cm = 38dm$$

$$2,58€ = 258ct; \quad 5600ct = 56€$$

$$0,02t = 20kg = 20000g; \quad 300mg = 0,3g$$

$$1d = 24h = 1440min; \quad 640s = 10min40s$$

Rechnen mit Größen: $2g + 450mg = 2000mg + 450mg = 2450mg = 2,45g$

$$2kg \cdot 5 = 10kg;$$

$$20kg : 5 = 4kg;$$

$$30kg : 6kg = 5$$

M 5.19

Maßstab



Ein **Maßstab** von 1 : 100 bedeutet, dass in Wirklichkeit alles 100-mal so lang wie auf dem Plan ist.

Maßstab: 1 : 5 000

Länge auf der Karte: 3cm



Länge in Wirklichkeit

$$3\text{cm} \cdot 5\,000 = 15\,000\text{cm} = 150\text{m}$$

Maßstab: 1 : 100

Länge in Wirklichkeit: 3m



Länge auf der Karte

$$3\text{m} : 100 = 300\text{cm} : 100 = 3\text{cm}$$

Länge in Wirklichkeit: 6km

Länge auf der Karte: 2cm



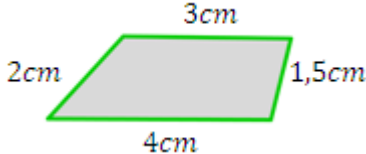
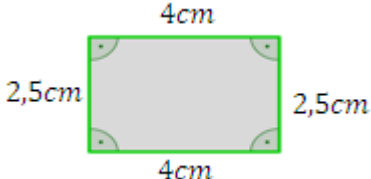
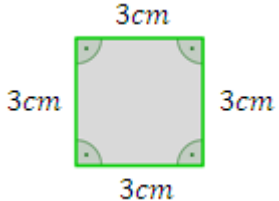
Maßstab

$$6\text{km} : 2\text{cm} = 600\,000\text{cm} : 2\text{cm} = 300\,000 : 1$$





Der **Umfang** einer Figur ist die Länge ihrer Randlinie.

<p>Viereck</p> 	$U = 4cm + 1,5cm + 3cm + 2cm = 10,5cm$
<p>Rechteck</p> 	$U = 2 \cdot 4cm + 2 \cdot 2,5cm = 13cm$
<p>Quadrat</p> 	$U = 4 \cdot 3cm = 12cm$

M 5.21

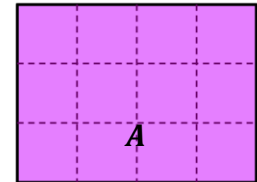
Flächeneinheiten



Die Größe der eingeschlossenen Fläche einer Figur nennt man **Flächeninhalt**

A.

Länge · Länge = Fläche



Flächeneinheiten und ihre Umrechnung

Quadratmillimeter	Quadrat-zentimeter	Quadrat-dezimeter	Quadratmeter	Ar	Hektar	Quadrat-kilometer
$1mm^2$	$1cm^2$	$1dm^2$	$1m^2$	$1a$	$1ha$	$1km^2$

· 100 · 100 · 100 · 100 · 100 · 100



$$1cm^2 = 100mm^2 ; 2,4a = 240m^2 ; 12345cm^2 = 123,45dm^2 = 1,2345m^2 ; 3ha = 0,03km^2$$

$$4a - 50m^2 = 400m^2 - 50m^2 = 350m^2 = 3,5a$$

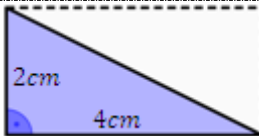
M 5.22

Flächeninhalt des Rechtecks



Rechteck	Quadrat
	
$A_R = \text{Länge} \cdot \text{Breite}$ $A_R = l \cdot b$	$A_Q = \text{Seitenlänge} \cdot \text{Seitenlänge}$ $A_Q = s \cdot s = s^2$

Den Flächeninhalt zusammengesetzter Figuren berechnet man, indem man sie in Rechtecke **zerlegt** oder zu Rechtecken **ergänzt**.



Der Flächeninhalt des Dreiecks ist halb so groß wie der des Rechtecks.

$$A_D = A_R : 2 = (2\text{cm} \cdot 4\text{cm}) : 2 = 8\text{cm}^2 : 2 = 4\text{cm}^2$$