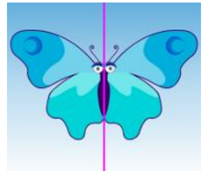
M 7.1

Achsensymmetrie

Punkte, die auf der Symmetrieachse liegen – **und nur diese** –, sind von zueinander symmetrischen Punkten gleich weit entfernt.

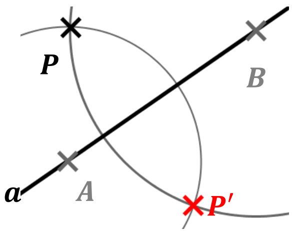
Eigenschaften achsensymmetrischer Figuren

- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird von der Symmetrieachse senkrecht halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich.

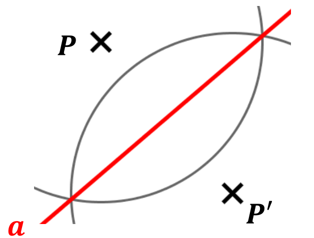


Konstruktionen

Konstruktion des Bildpunktes P'



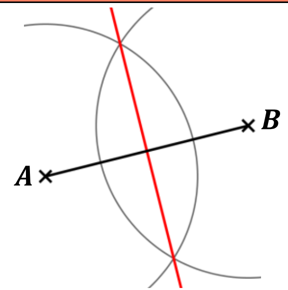
Konstruktion der Achse a



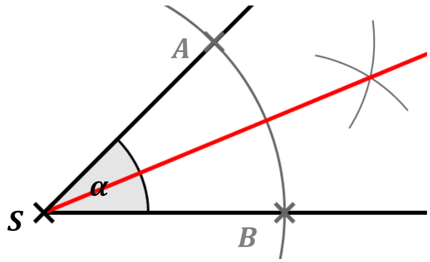
M 7.2

Grundkonstruktionen

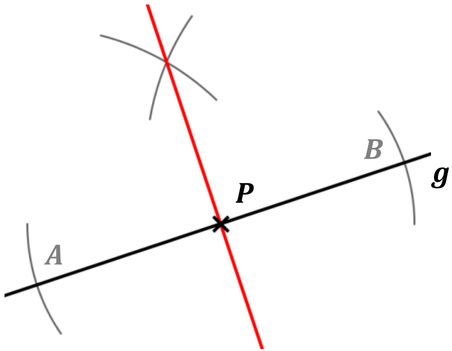
Mittelsenkrechte



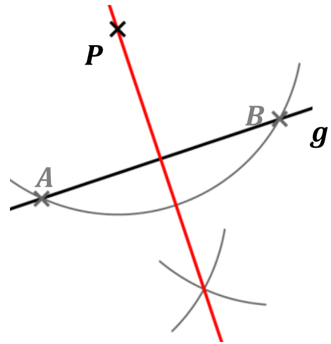
Winkelhalbierende



Lot errichten



Lot fällen

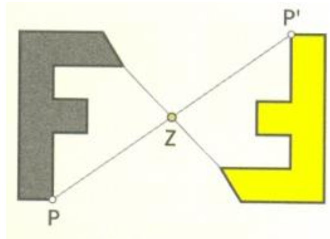


M 7.3

Punktsymmetrie

Figuren, die bei einer Drehung um $180°$ um einen Punkt Z mit sich selbst zur Deckung kommen, heißen **punktsymmetrisch**.

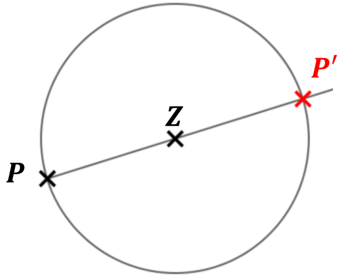
Eigenschaften punktsymmetrischer Figuren



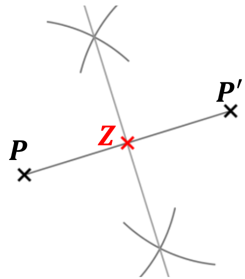
- Die Verbindungsstrecke zwischen Punkt und Bildpunkt wird vom Symmetriezentrum halbiert.
- Symmetrische Strecken sind gleich lang (Längentreue).
- Symmetrische Winkel sind gleich groß (Winkeltreue).
- Der Umlaufsinn von Figuren ändert sich nicht.

Konstruktionen

Konstruktion des Bildpunktes P'

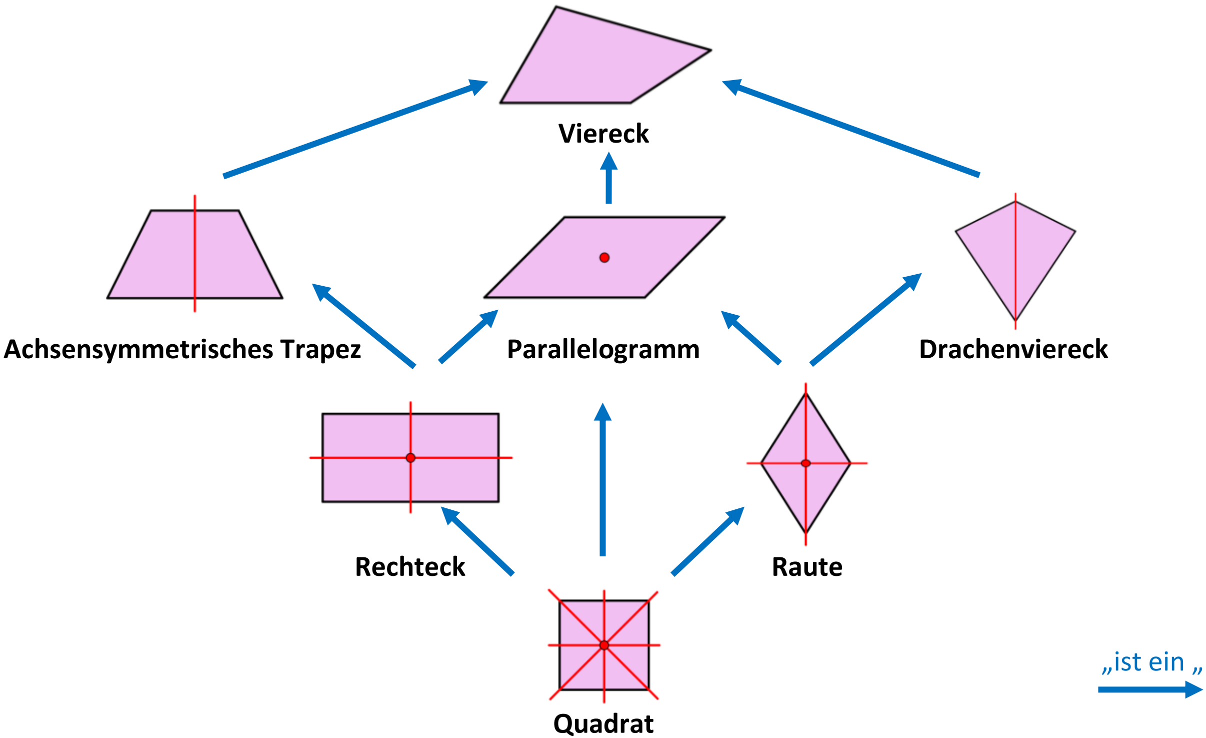


Konstruktion des Symmetriezentrums Z



M 7.4

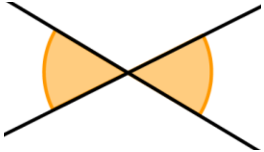
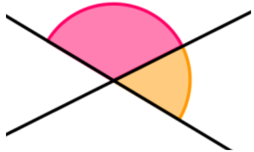
Vierecke



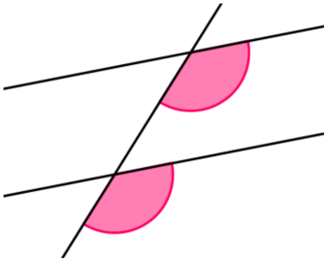
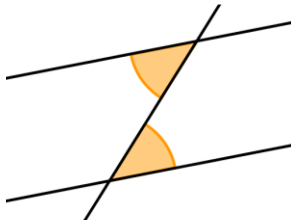
M 7.5

Winkel an Geraden

Winkel an einer Geradenkreuzung

	
Scheitelwinkel sind gleich groß.	**Nebenwinkel ergänzen sich zu 180°.**

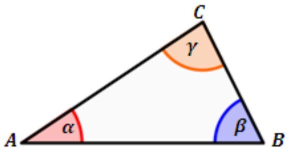
Winkel an einer Doppelkreuzung

	
Stufenwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.	**Wechselwinkel an parallelen Geraden sind gleich groß.**

M 7.6

Winkelsummen

Dreieck

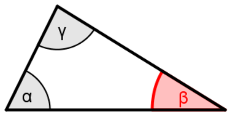


In einem Dreieck beträgt die Summe der Innenwinkel $180°$.

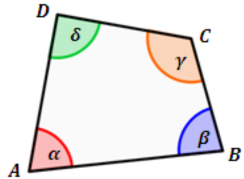
$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

$\alpha = 64°, \gamma = 85°$

$\beta = 180° - \alpha - \gamma =$
$= 180° - 64° - 85° = 31°$



Viereck

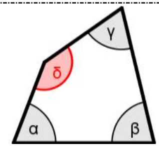


In einem Viereck beträgt die Summe der Innenwinkel $360°$.

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°}$$

$\alpha = 70°, \beta = 77°, \gamma = 68°$

$\delta = 360° - \alpha - \beta - \gamma =$
$= 360° - 70° - 77° - 68 = 145°$



Vieleck

In einem Vieleck mit n Ecken beträgt die Summe der Innenwinkel

$$\boldsymbol{(n-2) \cdot 180°}$$

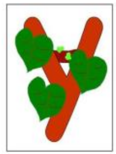
M 7.7

Terme

Ein **Term** ist ein Rechenausdruck, der aus Zahlen, Rechenzeichen und Variablen besteht. $3x - 7$ $a^2 + 3b^2$

Die **Variablen** sind Stellvertreter für Zahlen oder für Größen und werden durch Buchstaben dargestellt. $a, b, x, y, \ldots$

Setzt man für die Variablen Zahlen aus der Definitionsmenge ein, erhält man den **Termwert** für diese Zahlen. Für gleiche Variablen müssen gleiche Zahlen eingesetzt werden.



$$T(y; z) = 3y - 2z + y^2$$

Einsetzen von **4** für y und **5** für z: $T(\mathbf{4}; \mathbf{5}) = 3 \cdot \mathbf{4} - 2 \cdot \mathbf{5} + \mathbf{4}^2$

$$\boldsymbol{T(x) = \frac{2x - 3}{4x}} \qquad T(-1) = \frac{2 \cdot (-1) - 3}{4 \cdot (-1)} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4} \quad ; \quad T(2) = \frac{2 \cdot 2 - 3}{4 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

0 darf nicht für x eingesetzt werden, da sonst der Nenner Null würde. 0 ist also nicht in der Definitionsmenge enthalten.

M 7.8

Umformungen von Summen und Produkten

Zwei Terme heißen **äquivalent**, wenn *jede* Einsetzung von Zahlen für die Variablen jeweils die gleichen Termwerte ergeben. Mit Hilfe der Rechengesetze können wir Terme in äquivalente Terme umformen.

$$T(x) = x + (2x - 5) = 3x - 5$$

Terme, die sich nur im Zahlenfaktor unterscheiden, heißen **gleichartig**.

gleichartig: $3xz^2$, $\frac{1}{2}xz^2$, $-2z^2x$, xz^2 **dazu nicht gleichartig:** $3x^2z$, $-5z^2$, $2xz$

Umformungen in Summen	**Gleichartige Terme können zusammengefasst werden.**	$3x^2y + 2x^2y = 5x^2y$
Umformungen in Produkten	**Gleiche Faktoren können zu Potenzen zusammengefasst werden.**	$5 \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b \cdot c = 5a^2b^3c$

$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot a - b^2 + 3{,}5ba^2 + b \cdot 4 \cdot b = 0{,}5a^2b + 3{,}5a^2b - b^2 + 4b^2 = 4a^2b + 3b^2$$

M 7.9

Rechenregeln für Potenzen

Potenzen mit der gleichen Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert.	$\boldsymbol{a^{n} \cdot a^{m} = a^{n+m}}$	$(-x)^2 \cdot (-x)^4 = (-x)^6 = x^6$
Ein Produkt wird potenziert, indem man den Exponenten auf jeden Faktor verteilt.	$\boldsymbol{(a \cdot b)^{n} = a^{n} \cdot b^{n}}$	$(-2x)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 = 4x^2$
Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert.	$\boldsymbol{(a^{n})^{m} = a^{n \cdot m} = a^{nm}}$	$(-x^3)^2 = (-x)^6 = x^6$

$$3 \cdot 4 \cdot a^2 \cdot b \cdot a^3 \cdot b^4 = 12a^5b^5 \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}z\right)^2 = \frac{1}{4}z^2 \quad ; \quad (3a^3)^2 = 9a^6 \quad ; \quad (-b)^7 = -b^7$$

M 7.10

Auflösen von Klammern

Klammerregeln	
Plus vor der Klammer Klammern einfach weglassen	**Minus vor der Klammer** alle Vorzeichen in der Klammer umdrehen und Klammern weglassen
$\boldsymbol{a+(b+c)=a+b+c}$	$\boldsymbol{a-(+b+c)=a-b-c}$
$3+(-x-2)=3-x-2$	$3-(-x-2)=3+x+2$

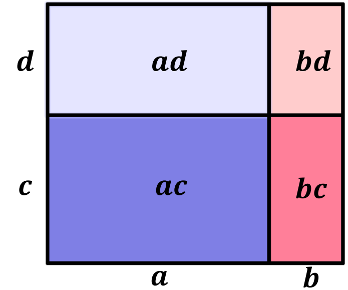
Distributivgesetz	
Ausmultiplizieren Produkt → Summe	**Ausklammern (Faktorisieren)** Summe → Produkt
$\boldsymbol{a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c}$	$\boldsymbol{a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c)}$
$4x\cdot(3-x)=12x-4x^2$	$12x-4x^2=4x\cdot(3-x)$
$(-2x)\cdot(-x+3x^2-1)=2x^2-6x^3+2x$	$-2ab^2-2a^2b=-2ab\cdot(b+a)$

M 7.11

Multiplizieren von Summen

Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten Klammer multipliziert und diese Produkte werden addiert.

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$



$$(4x-3)\cdot(y+2)=4xy+8x-3y-6$$
$$(-a+1)\cdot(3a^2-1)=-3a^3+a+3a^2-1$$
$$(-2x-a)\cdot(x-a+3)=-2x^2+2ax-6x-ax+a^2-3a$$
$$(3x-2)^2=(3x-2)\cdot(3x-2)=9x^2-6x-6x+4=9x^2-12x+4$$

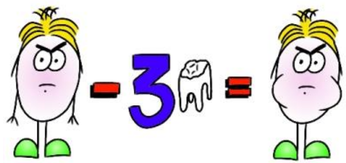
M 7.12

Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind.

Die **Grundmenge** $\boldsymbol{G}$ gibt an, welche Zahlen anstelle der Variablen eingesetzt werden dürfen.

Die **Lösungsmenge** $\boldsymbol{L}$ enthält alle Zahlen, die beim Einsetzen eine wahre Aussage ergeben.



$4x - 5 = 3, \quad G = \mathbb{Q}$ $L = \{2\}$ denn $4 \cdot 2 - 5 = 3$ ist wahr	$2a - 4 = 5 + 5a, \quad G = \mathbb{Q}$ $L = \{-3\}$ denn $2 \cdot (-3) - 4 = 5 + 5 \cdot (-3)$ ist wahr

M 7.13

Lösen von Gleichungen

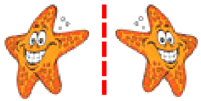
Mit Hilfe von **Äquivalenzumformungen** kann eine Gleichung nach der Variablen aufgelöst werden. Die Lösungsmenge ändert sich dabei nicht.

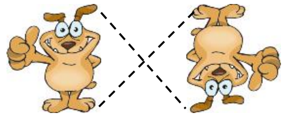
4 Schritte	Lösen linearer Gleichungen	Äquivalenzumformung
Termumformung Beide Seiten vereinfachen	$9x-(2x-5)=3\cdot(x+1)+x-13$ $9x-2x+5=3x+3+x-13$ $7x+5=4x-10$	• Klammern auflösen /ausmultiplizieren • Gleichartige Terme zusammenfassen
Trennen x-Terme auf die eine Seite, Terme ohne x auf die andere Seite bringen	$7x+5=4x-10 \quad /-4x$ $3x+5=-10 \quad /-5$ $3x=-15$	Addieren oder Subtrahieren des gleichen Terms oder der gleichen Zahl auf beiden Seiten
x isolieren Koeffizient „wegbringen“	$3x=-15 \quad /:3$ $x=-5$	Multiplizieren oder Dividieren mit der gleichen Zahl ($\neq 0$) auf beiden Seiten
Lösung	$x=-5$ $L=\{-5\}$	Lösungsmenge angeben, falls verlangt (evtl. Grundmenge beachten)

M 7.14

Kongruenz und Kongruenzsätze

Deckungsgleiche Figuren F und G nennt man **zueinander kongruent**: $F \cong G$





Kongruenzsätze für Dreiecke

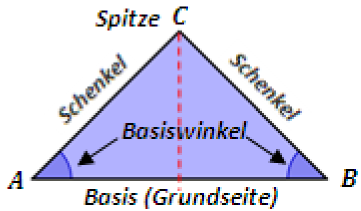
Zwei Dreiecke sind bereits kongruent, wenn sie	
➢ in drei Seiten übereinstimmen (**SSS**).	**SSS** 
➢ in einer Seite und zwei gleichliegenden Winkeln übereinstimmen (**WSW** oder **SWW**).	**WSW**  **SWW** 
➢ in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen (**SWS**).	**SWS** 
➢ in zwei Seiten und dem Gegenwinkel der längeren Seite übereinstimmen (**SsW**).	**SsW** 

M 7.15

Besondere Dreiecke

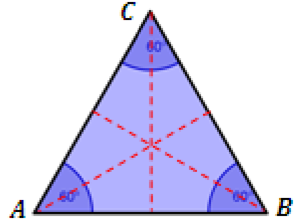
Ein Dreieck mit zwei gleich langen Seiten heißt **gleichschenkliges Dreieck**.

- achsensymmetrisch
- Basiswinkel sind gleich groß

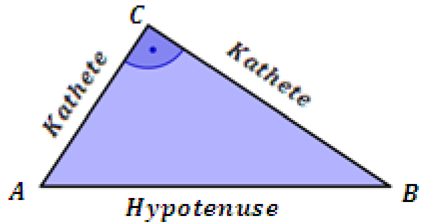


Ein Dreieck mit drei gleich langen Seiten heißt **gleichseitiges Dreieck**.

- drei Symmetrieachsen
- drei 60°-Winkel



Ein Dreieck mit einem rechten Winkel heißt **rechtwinkliges Dreieck**.



M 7.16

Satz des Thales

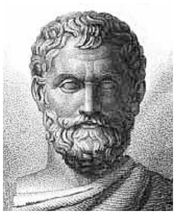
Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf einem Kreis mit dem Durchmesser $[AB]$ liegt.

Mathematische Sätze werden häufig in der Form „Wenn…(Voraussetzung), dann…(Behauptung)“ formuliert. Vertauscht man Voraussetzung und Behauptung, erhält man den Kehrsatz.

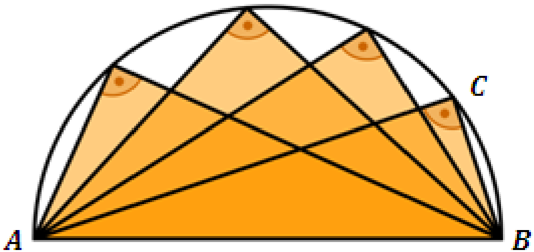
„genau dann…, wenn…“ bedeutet, dass sowohl Satz als auch Kehrsatz wahr sind.

Satz

Wenn die Ecke C auf einem Kreis mit Durchmesser $[AB]$ liegt, **dann** hat das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel.



Thales von Milet
(ca. 625 - 545 v. Chr.)

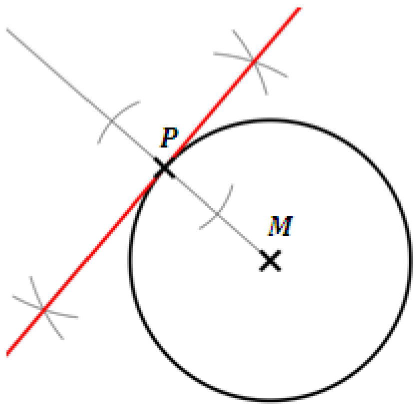
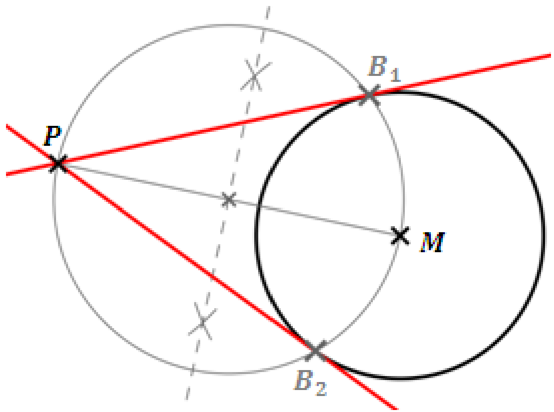


Kehrsatz

Wenn das Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, **dann** liegt die Ecke C auf einem Kreis mit Durchmesser $[AB]$.

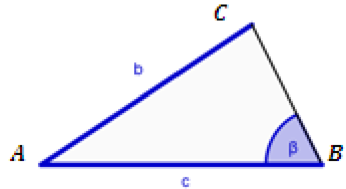
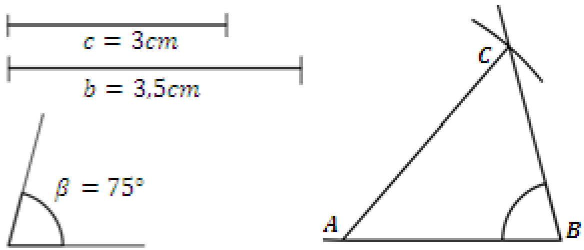
M 7.17

Konstruktion von Kreistangenten

P liegt auf dem Kreis	P liegt außerhalb des Kreises
1) Zeichne die Halbgerade $[MP$ 2) Errichte in P das Lot zu $[MP$ → Tangente	1) Zeichne die Strecke $[MP]$ 2) Konstruiere den Mittelpunkt von $[MP]$ und damit den Thaleskreis über der Strecke $[MP]$ 3) Verbinde die Schnittpunkte der beiden Kreise B_1 und B_2 mit P → Tangenten
	

M 7.18

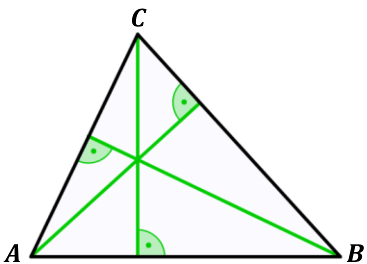
Dreieckskonstruktionen

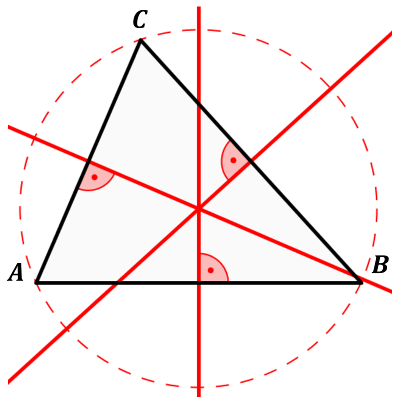
		$c = 3cm\ ,\ \ b = 3,5cm\ ,\ \ \beta = 75°$
1. Schritt Planfigur	Zeichne ein beliebiges Dreieck und markiere darin die gegebenen Stück farbig.	
2. Schritt Konstruktions-plan	Schreibe auf, wie du nacheinander die Eckpunkte der gesuchten Figur erhältst.	(1) A und B sind durch $\overline{AB} = c$ gegeben. (2) C liegt 1. auf dem Kreis $k(A; r = b)$ 2. auf dem freien Schenkel des Winkels β, angetragen in B an AB
3. Schritt Konstruktion	Konstruiere das Dreieck wie im Plan beschrieben nur mit Zirkel und Lineal.	

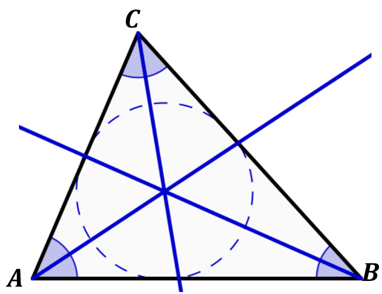
M 7.19

Besondere Linien im Dreieck

Höhen	Mittelsenkrechten	Winkelhalbierende
Die Höhen schneiden sich in einem Punkt.	Die Mittelsenkrechten schneiden sich im Umkreismittelpunkt.	Die Winkelhalbierenden schneiden sich im Inkreismittelpunkt.

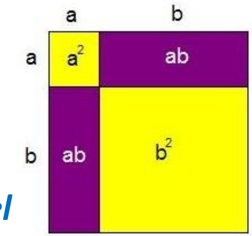






M 7.20

Binomische Formeln



1. Binomische Formel: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ***Plus-Formel***
2. Binomische Formel: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ***Minus-Formel***
3. Binomische Formel: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$ ***Plus-Minus-Formel***

$(5x+y)^2 = 25x^2 + 10xy + y^2$; $(0{,}5a-1)^2 = 0{,}25a^2 - a + 1$; $(1-m)(1+m) = 1 - m^2$

Anwendungen:

1) Ausmultiplizieren (Produkte werden zu Summen):

$$(3+2a)^2 = 3^2 + 2\cdot 3\cdot 2a + (2a)^2 = 9 + 12a + 4a^2$$

2) Faktorisieren (Summen werden zu Produkten):

$$9x^2 - 1 = (3x)^2 - 1^2 = (3x+1)(3x-1)$$

M 7.21

Median, Spannweite

Spannweite: Differenz aus dem größtem und kleinsten Wert eines Datensatzes

Median:

Bei ungerader Anzahl von Daten der Wert in der Mitte eines geordneten Datensatzes

0,4	**0,4**	**2,1**	**2,5**	**2,6**	**3,7**	**4,8**	**5,6**	**5,6**

Median 2,6;

Spannweite $5,6 - 0,4 = 5,2$

Bei gerader Anzahl von Daten das arithmetische Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte des geordneten Datensatzes

0,4	**0,4**	**2,1**	**2,5**	**2,6**	**3,7**	**4,8**	**5,6**

Median $(2,5 + 2,6) : 2 = 2,55$ **;**

Spannweite: $5,6 - 0,4 = 5,2$

M 7.22

Quartile

Der **Median** zerlegt einen geordneten Datensatz in zwei gleich große Blöcke. Er gehört zu keinem der Blöcke.

Unteres Quartil: Median des unteren Blocks eines geordneten Datensatzes
Oberes Quartil: Median des oberen Blocks eines geordneten Datensatzes

0,4	0,4	2,1	2,5	2,6	3,7	4,8	5,6
Unterer Block				Oberer Block			

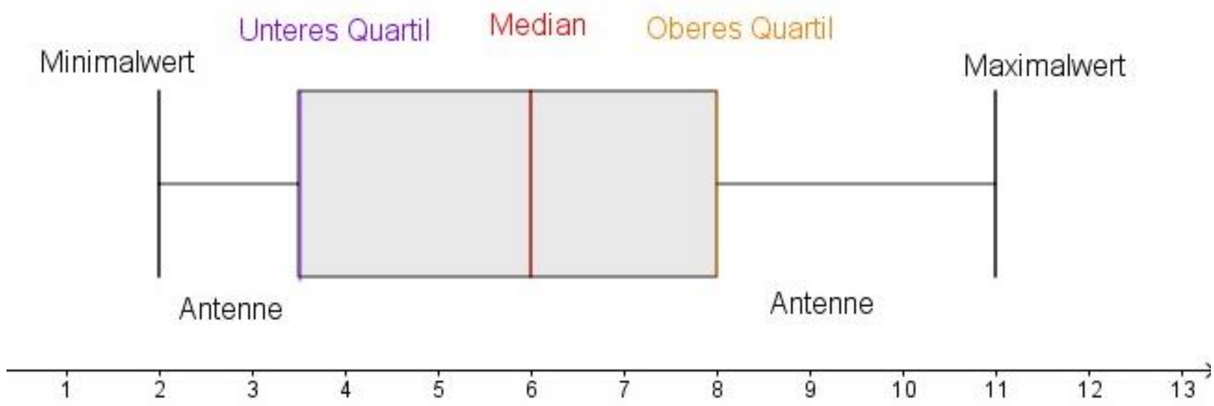
Unteres Quartil $(2,1 + 0,4) : 2 = 1,75$

Median $(2,6 + 2,5) : 2 = 2,55$

Oberes Quartil $(4,8 + 3,7) : 2 = 4,25$

M 7.23

Boxplot



Boxplot für den geordneten Datensatz

2	**2**	**3**	**4**	**5**	**5**	**6**	**7**	**7**	**8**	**8**	**9**	**11**