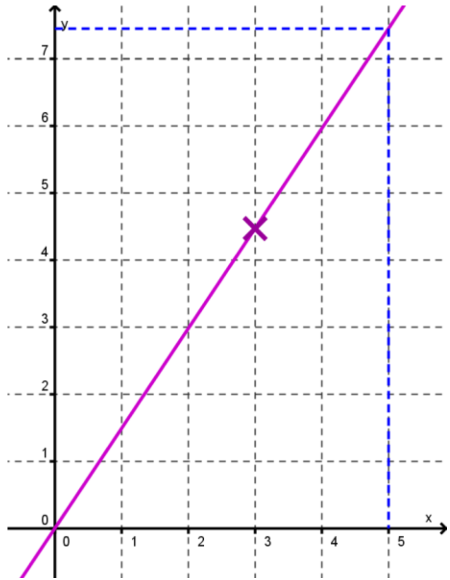
M 8.1

Direkte Proportionalität

Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind (direkt) **proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert von x der n-fache Wert von y gehört.
- der Quotient $\frac{y}{x} = q$ für alle Wertepaare gleich ist. (= **Proportionaliätsfaktor q**)
- $y = q \cdot x$ ist.
- der Graph der Zuordnung eine Ursprungsgerade ist.



3 Ananas kosten 4,47€. Wie viel kosten 5 Ananas?

Die Zuordnung $\boldsymbol{Anzahl(x)} \mapsto \boldsymbol{Preis(y)}$ ist proportional.

Dreisatz oder ***Proportionalitätsfaktor***

$$\begin{array}{rcl} & 3 \mapsto 4{,}47€ & \\ :3 & & :3 \\ & 1 \mapsto 1{,}49€ & \\ \cdot 5 & & \cdot 5 \\ & \mathbf{5} \mapsto \mathbf{7{,}45€} & \end{array}$$

$$q = \frac{4{,}47€}{3} = 1{,}49€$$

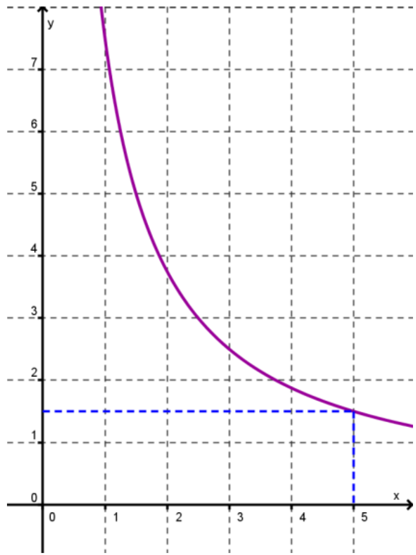
$$y = q \cdot x = 1{,}49€ \cdot 5 = \mathbf{7{,}45€}$$

M 8.2

Indirekte Proportionalität

Zwei einander zugeordnete Größen x und y sind **indirekt** (oder „umgekehrt“) **proportional**, wenn

- zum n-fachen Wert von x der $\frac{1}{n}$-fache Wert von y gehört.
- das Produkt $x \cdot y = p$ für alle Wertepaare gleich ist.
- $y = \frac{p}{x}$ ist.
- der Graph der Zuordnung eine Hyperbel ist.



Mit 3 Schläuchen ist ein Schwimmbecken in 2,5 Stunden gefüllt. Wie lange dauert es mit 5 Schläuchen?

Die Zuordnung $\boldsymbol{Anzahl(x)} \mapsto \boldsymbol{Stunden(y)}$ ist indirekt proportional.

Dreisatz

$$\begin{array}{rccl} :3 & 3 \mapsto 2{,}5h & \cdot 3 \\ & 1 \mapsto 7{,}5h & \\ \cdot 5 & \mathbf{5} \mapsto \mathbf{1{,}5h} & :5 \end{array}$$

oder

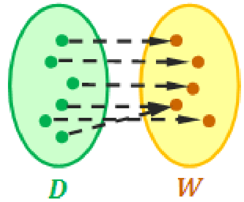
$$p = 3 \cdot 2{,}5h = 7{,}5h$$

$$y = \frac{p}{x} = \frac{7{,}5h}{5} = \mathbf{1{,}5h}$$

M 8.3

Funktionsbegriff

Eine Zuordnung $x \mapsto y$, die jedem Wert für x jeweils nur einen einzigen Wert für y zuordnet, heißt **Funktion**.



- Der von x abhängige Wert $f(x)$ bzw. y heißt **Funktionswert**.
- Die Menge aller zulässigen x-Werte heißt **Definitionsmenge D**.
- Die Menge aller möglichen Funktionswerte heißt **Wertemenge W**.

Funktion: x^2

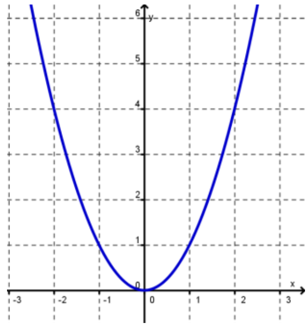
Schreibweisen:

- $f: x \mapsto x^2$
- $f(x) = x^2$
- $y = x^2$

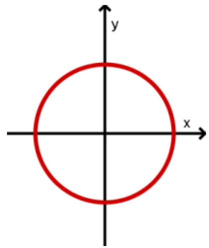
$\boldsymbol{D_f} = \mathbb{Q}$

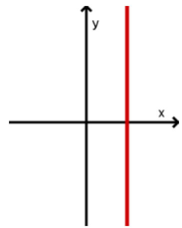
$\boldsymbol{W_f} = \mathbb{Q}_0^+$

Graph:



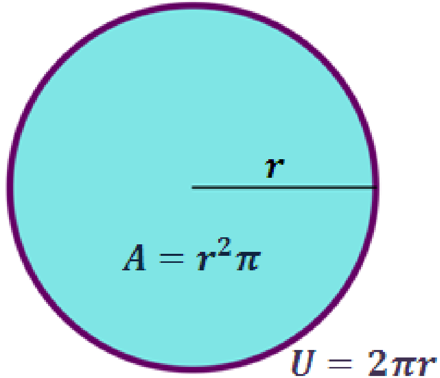
Keine Funktionen





M 8.4

Umfang und Flächeninhalt des Kreises



Umfang

$$U = \pi \cdot d$$

$$U = 2 \cdot \pi \cdot r$$

Flächeninhalt

$$A = r^2 \cdot \pi$$

→ Der Durchmesser d ist direkt proportional zum Umfang U.
π ist der Proportionalitätsfaktor.

Kreiszahl $\boldsymbol{\pi = 3{,}141592654}$ … (π ist keine rationale Zahl)

$k(M; 3cm)$ [„Kreis um M mit Radius $3cm$"]

$\Rightarrow U = 2\pi \cdot 3cm \approx 18{,}85cm$

$\Rightarrow A = (3cm)^2 \cdot \pi \approx 28{,}27cm^2$

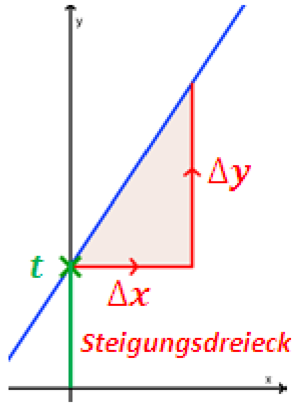
M 8.5

Lineare Funktionen

Funktionsgleichung: $y = mx + t$

Steigung (m) **y-Achsenabschnitt** (t)

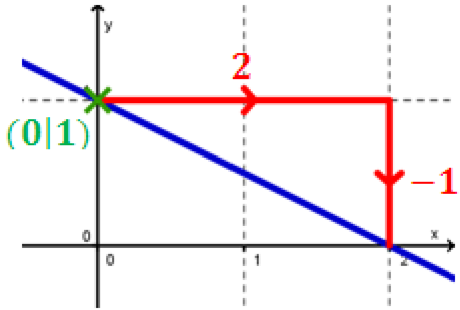
Graph: Gerade mit der Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ durch den Punkt $(0|t)$



Ein x-Wert, für den der Funktionswert y Null ist, heißt **Nullstelle.**

Zeichne den Graphen der Funktion $y = -\frac{1}{2}x + 1.$

- Markiere den Punkt $(0|1)$.
- Trage von dort den Nenner von $m = \frac{-1}{2}$ in x-Richtung ab
- und trage dann den Zähler von $m = \frac{-1}{2}$ in y-Richtung ab.



M 8.6

Aufstellen der Geradengleichung

Ansatz: $y = mx + t$

1. **Schritt: Bestimme die Steigung m**
2. **Schritt: Bestimme den y-Achsenabschnitt t**

Bestimme den Funktionsterm der linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte $A(2|3)$ und $B(4|-1)$ verläuft.

Ansatz: $y = mx + t$

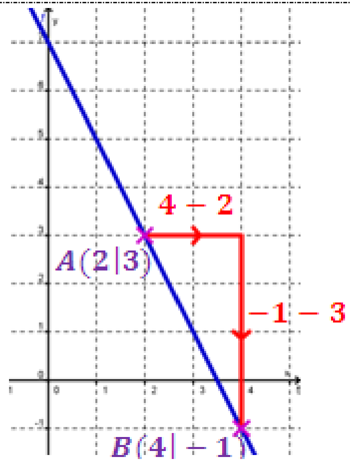
1. Schritt:

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-3}{4-2} = -\frac{4}{2} = -2$$

2. Schritt: Setze A oder B in $y = -2x + t$ ein:

$3 = -2 \cdot 2 + t \quad \Rightarrow t = 7$

$\Rightarrow y = -2x + 7$



M 8.7

Lineare Ungleichungen

Ungleichungen kann man wie Gleichungen schrittweise vereinfachen.

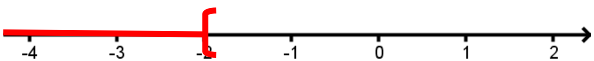
Vorsicht: Bei Multiplikation oder Division mit einer **negativen Zahl**, kehrt sich das Ungleichheitszeichen um!

Die Lösungsmenge kann man in **Mengen- oder Intervallschreibweise** angeben.

$$-3x > 6 \quad /:(-3)$$
$$x < -2$$

$$L = \{x|x < -2\}$$

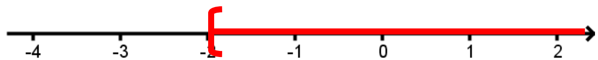
$$L =]-\infty; -2[$$



$$-\frac{1}{4}x \leq 0{,}5 \quad /\cdot(-4)$$
$$x \geq -2$$

$$L = \{x|x \geq -2\}$$

$$L = [-2; \infty[$$



M 8.8

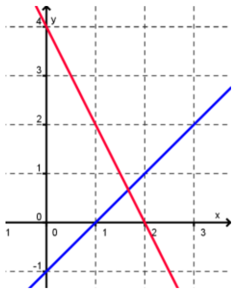
Lineare Gleichungssysteme I

Zwei lineare Gleichungen mit zwei gleichen Variablen bilden ein **lineares Gleichungssystem mit zwei Variablen.**

$$\begin{aligned} (I)\ \ & ax + by = c \\ (II)\ \ & dx + ey = f \end{aligned}$$

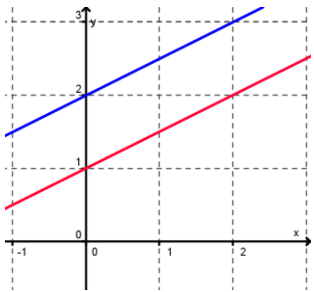
Die Gleichungen lassen sich durch Geraden graphisch darstellen (→ Auflösen nach y).

$(I)\quad y - x = 1$
$(II)\ y + 2x = 4$



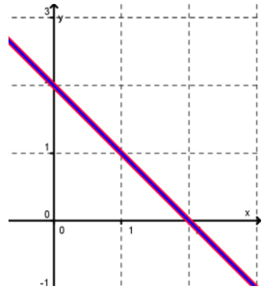
eine Lösung

$(I)\ 2y - x = 4$
$(II)\ 2y - x = 2$



keine Lösung

$(I)\ 2,5x + 2,5y = 5$
$(II)\quad x + y = 2$



Unendlich viele Lösungen

M 8.9

Lineare Gleichungssysteme II

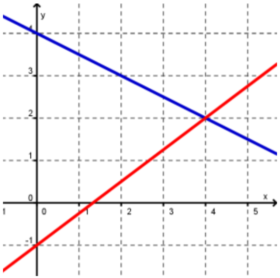
$$\begin{array}{lll} (I)\quad x+2y=8 & \Rightarrow & (I')\; y=-0{,}5x+4 \\ (II)\; 3x-4y=4 & \Rightarrow & (II')\; y=0{,}75x-1 \end{array}$$

Graphische Lösung

$(I')y = -0{,}5x + 4$

$(II')y = 0{,}75x - 1$

$\Rightarrow L = \{(4;2)\}$



Gleichsetzungsverfahren

$$(I') = (II')$$

$$-0{,}5x + 4 = 0{,}75x - 1 \;/ -0{,}75x - 4$$

$$-1{,}25x = -5 \quad /:(-1{,}25)$$

$$x = 4$$

$y = -0{,}5 \cdot 4 + 4 = 2$

$\Rightarrow L = \{(4;2)\}$

Einsetzungsverfahren

(II') ***in*** (I)**:** $x + 2(0{,}75x - 1) = 8$

$$2{,}5x - 2 = 8 \;/+2$$

$$2{,}5x = 10 \;/:2{,}5$$

$$x = 4$$

$y = 0{,}75 \cdot 4 - 1 = 2$

$\Rightarrow L = \{(4;2)\}$

Additionsverfahren

$\mathbf{2} \cdot (\boldsymbol{I}) + (\boldsymbol{II})$: $2x + 4y + 3x - 4y = 16 + 4$

$$5x = 20 \;/:5$$

$$x = 4$$

$4 + 2y = 8 \quad \Rightarrow y = 2$

$\Rightarrow L = \{(4;2)\}$

M 8.10

Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ein **Zufallsexperiment** ist ein Experiment, bei dem verschiedene Ergebnisse möglich sind.

Die Menge aller möglichen Ergebnisse nennt man **Ergebnismenge Ω**.

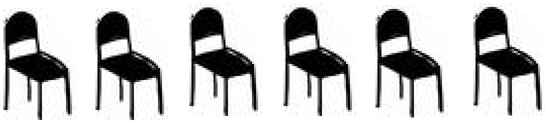
Eine Teilmenge der Ergebnismenge Ω nennt man **Ereignis**.

Zählprinzip

Bei einem mehrstufigen Zufallsexperiment erhält man die Gesamtzahl der verschiedenen Möglichkeiten, indem man die Anzahlen der verschiedenen Möglichkeiten in den einzelnen Stufen multipliziert.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, sechs Personen auf sechs Stühlen anzuordnen?

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6! = 720$



M 8.11

Laplace-Experimente

Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse gleich wahrscheinlich sind, heißen **Laplace-Experimente**.

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{Anzahl\ der\ günstigen\ Ergebnisse}{Anzahl\ der\ möglichen\ Ergebnisse} = \frac{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ A}{Anzahl\ der\ Elemente\ von\ \Omega} = \frac{|A|}{|\Omega|}}$$

Einmaliger Würfelwurf

$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}, \quad |\Omega| = 6$

A: "Augenzahl ist gerade", $\quad A = \{2; 4; 6\}, \quad |A| = 3$

$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

Einmaliger Münzwurf

$\Omega = \{K; Z\}, \quad |\Omega| = 2$

$P(K) = P(Z) = \frac{1}{2} = 50\%$

M 8.12

Gebrochen rationale Funktionen – Bruchterme

Terme, bei denen eine Variable im Nenner auftritt, heißen **Bruchterme**.

$$\frac{1}{x};\quad \frac{3}{x};\quad \frac{5}{x-1};\quad \frac{z-3}{z^2};\quad \frac{3a-1}{a+2}$$

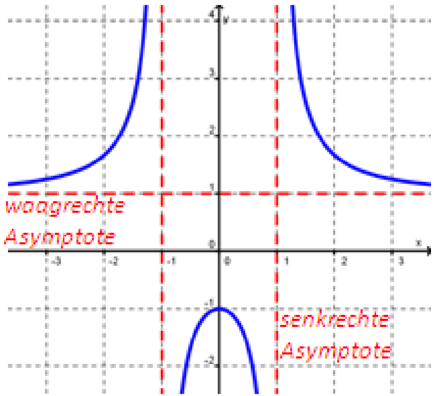
Funktionen, deren Funktionsterm ein Bruchterm ist, heißen **gebrochen rationale Funktionen**.

Ihr Graph ist eine **Hyperbel**.

Für die Variablen dürfen keine Zahlen eingesetzt werden, für die der Nenner null wird. Diese Zahlen nennt man **Definitionslücken**. Sie gehören nicht zur Definitionsmenge der Funktion.

Geraden, an die sich der Graph beliebig genau annähert, nennt man **Asymptoten**.

$$f(x) = \frac{2}{x^2-1} + 1;\quad D_f = \mathbb{Q}\setminus\{-1; 1\}$$



M 8.13

Rechnen mit Bruchtermen

Kürzen

- *Zähler und Nenner faktorisieren*
- *Gleiche Terme kürzen*

Nie aus Summen kürzen!

$$\frac{3x-5x^2}{7x^3-x}=\frac{\boldsymbol{x}(3-5x)}{\boldsymbol{x}(7x^2-1)}=\frac{3-5x}{7x^2-1}$$

Addieren und Subtrahieren

- *Bruchterme gleichnamig machen*
- *Zähler addieren/subtrahieren*

$$\frac{3}{\boldsymbol{x-1}}+\frac{4}{\boldsymbol{3x-2}}=$$

$$=\frac{3(\boldsymbol{3x-2})}{(x-1)(\boldsymbol{3x-2})}+\frac{4(\boldsymbol{x-1})}{(\boldsymbol{x-1})(3x-2)}=$$

$$=\frac{9x-6+4x-4}{(x-1)(3x-2)}=\frac{13x-10}{(x-1)(3x-2)}$$

Multiplizieren

Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner

$$\frac{3-x}{2x}\cdot\frac{4x}{x-1}=\frac{(3-x)\cdot 4x}{2x(x-1)}$$

Dividieren

Multiplizieren mit dem Kehrbruch

$$\frac{2}{3x}:\frac{4-x}{x^2}=\frac{2}{3x}\cdot\frac{x^2}{4-x}=\frac{2x^2}{3x(4-x)}$$

M 8.14

Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}}$ für jede natürliche Zahl n

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ für jede natürliche Zahl n, $a \neq 0$

$a^0 = 1$ für jede rationale Zahl $a \neq 0$

$10^4 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10000$; $10^{-4} = \frac{1}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10} = \frac{1}{10000}$; $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$; $5^0 = 1$

Gleitkommadarstellung

$a \cdot 10^n$

$1 \leq a < 10$

n gibt an, um wie viele Stellen man das Komma verschieben muss

$3{,}2 \cdot 10^5 = 320\,000$; $3{,}2 \cdot 10^{-5} = 0{,}000032$

M 8.15

Rechnen mit Potenzen

Multiplizieren

Hochzahlen addieren

$$\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$$

$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$ $x^2 \cdot x^3 = x^5$

Dividieren

Hochzahlen subtrahieren

$$\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$$

$4^7 : 4^3 = 4^{7-3} = 4^4$ $x^6 : x^2 = x^4$

Potenzieren einer Potenz

Hochzahlen multiplizieren

$$\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{nm}}$$

$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$ $(b^3)^7 = b^{21}$

Potenzieren von Produkten und Quotienten

Hochzahlen verteilen

$$\boldsymbol{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \qquad \boldsymbol{(a : b)^n = a^n : b^n}$$

$(5 \cdot 7)^3 = 5^3 \cdot 7^3$ $(4 : 2)^7 = 4^7 : 2^7$

$(pq)^2 = p^2 \cdot q^2$ $\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \frac{x^4}{y^4}$

Vorsicht: $(3x^2 + 7)^2 = (3x^2 + 7)(3x^2 + 7) = 9x^4 + 42x^2 + 49$ → *kein Verteilen der Hochzahlen bei Summen*

M 8.16

Bruchgleichungen

1. Schritt: Definitionsmenge bestimmen

2. Schritt: Beide Seiten mit dem **gemeinsamen Nenner** aller Bruchterme multiplizieren und anschließend kürzen

3. Schritt: Bruchtermfreie Gleichung lösen

4. Schritt: Überprüfen, ob die Lösung zur Definitionsmenge gehört

5. Schritt: Lösungsmenge angeben

$$\frac{2}{6-x}=\frac{1}{x}$$

$$D=\mathbb{Q}\setminus\{0;6\}$$

$$\frac{2}{6-x}=\frac{1}{x} \quad /\cdot x(6-x)$$

$$\frac{2x(6-x)}{6-x}=\frac{x(6-x)}{x}$$

$$2x=6-x \quad /+x$$

$$3x=6 \quad /:3$$

$$x=2$$

$$2\in D$$

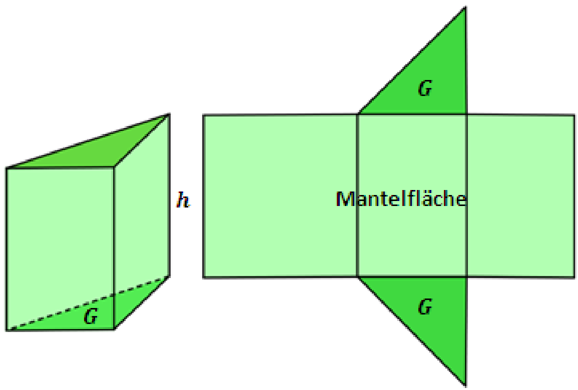
$$\Rightarrow L=\{2\}$$

M 8.17

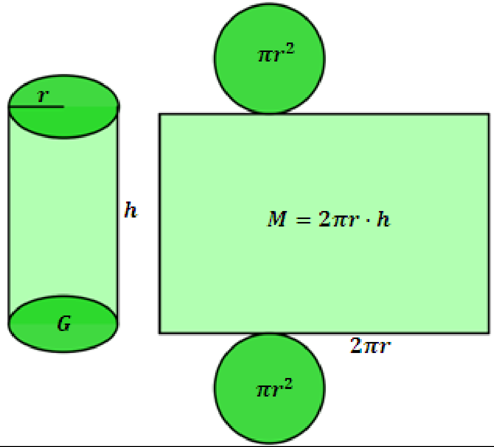
Prisma und Zylinder

ROBERT SCHUMAN GYMNASIUM CHAM

Prisma



Zylinder



Volumen: $V = Grundfläche \cdot Höhe$

Oberfläche: $O = 2G + M$

$V_{Prisma} = G \cdot h$	$V_{Zylinder} = G \cdot h = \pi r^2 \cdot h$ $O_{Zylinder} = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot h$

M 8.18